श्री

अंकगणित.

दुसराभाग

अणगांक.

इसवीसन् १८६६.

मे.

शके १७८८ क्षय.
संवत्

वैशाखवद्य

मुक्काम मुंबई येथ काशिनाथबाळचंद्र खाडन याणी
आपले चंद्रप्रकाशशाळा
छापिलें.

अनुक्रमणिका.

समाप्त

अपूर्णांक.

कार्यप्रकाशकचिन्हें.

गणित आणि बीजगणित यांमध्यें कितीएककामाचीं प्रकाशक म्हणजे दाखविणारीं चिन्हें आहेत तीं लिहितों.

+ हें चिन्ह अधिक करण्याचें म्हणजे मिळविण्याचें, हें धनचिन्ह.

− हें उणें करण्याचें म्हणजे वजाकरण्याचें. हें ऋणचिन्ह.

× हें गुणण्याचें.

÷ हें भागण्याचें.

∷ हें राशिगणितकरण्याचें.

= हें म्हणजेशब्दाचें किंवा बराबर.

√ हें वर्गमूळ करण्याचें.

∛ हें घनमूळ करण्याचें.

यांचीं उपयोग स्थळें.

५+३ यांत ५ आणि ३ यांची मिळवणी करावी, असें मध्यचिन्ह दाखवितें.

६−२ यांत ६ तून २ उणे करावे, म्हणजे साहांत दोन वजा करावे.

७×३ यांत ७ नी तीन गुणावे, हें मध्यचिन्ह दाखवितें.

८÷४ यांत आठ चोंहोनी भागावे, असें मध्य चिन्ह दाखवितें.

२:३::४:६ यांत जसे दोन तिहींस तसे चार साहांस.

$७^{२}$ यांत सातांचा वर्ग करावा हें तो वरचा लहान अंक दाखवितो.

$८^{३}$ यांत आठांचा घन करावा हें तो वरचा लहान अंक दाखवितो.

$\sqrt{३}$ किंवा $३^{\frac{१}{२}}$ यांत तिहींचें वर्गमूळ करावें.

$\sqrt[३]{५}$ किंवा $५^{\frac{१}{३}}$ यांत पांचांचें घनमूळकरावें.

व्यवहारीअपूर्णांक.

कोणताही अवयवी किंवासंख्यापूर्ण अथवा अखंड जाणून, त्याचे कितीही खंड केलेतरी त्या खंडांचा सूचकास अपूर्ण म्हणतात. जसें, जर, मूळ अवयवीचे आठ भागकेलेतर त्याभागांतून ३, ५, ७,

इत्यादि भाग घेतात त्यांस अपूर्णह्मणतात; आणि त्याची लिहिण्याचीरीति याप्रमाणें आहे.

१/३, १/५, ५/७; इत्यादि. रेघेचाखालच्याआंगास जी संख्या आहे तीस छेद ह्मणतात, कांकीं मूळ अवयवी किती भागानी छेदिला आहे तें ती दाखविते आणिरेघेचावरच्या वरच्या आंगास जीसंख्या आहेतीस अंश असेंह्मणतात, कांकींमूळ अवयवींचा अपूर्णपणा दाखवाया साठीं त्याचेकेलेले छेदांतून किती भाग घेतले आहेत हें ती दाखविते. यारूपाच्यासंख्येस दशांश अपूर्णांकाचाभेद दाखवाया साठीं व्यवहारी अपूर्णांक असेंनावठेविलें आहे.

व्यवहारी अपूर्णांकांत कांहीं भेदआहेत; जसें, सम, विषम, भागजाती, प्रभागजाती, भागानुबंध अपूर्णांक इत्यादि.

समअपूर्णांक तोच होय, ज्यांत अंशछेदांहून उणे आहेत; जसें, १/२ अथवा ३/४ अथवा ३/८

विषम अपूर्णांक तोचहोय, ज्यांत अंश छेदांच्याबराबर किंवा अधिक आहेत; जसें, ३/३ अथवा ५/३ अथवा ९/७ याप्रकारास विषम असें नाव ठेवायाचें कारण हेंच आहे कीं, असा अपूर्णांक एकंचे बराबर किंवा एकापेक्षां अधिक आहे.

भागजाति अपूर्णांक तोचहोय, ज्यांत एकेसगळे वस्तूचा तुकडा केवळ अपूर्णांकच आहे; जसें, १/२ अथवा १/३.

प्रभागजाति अपूर्णांक तोचहोय, ज्यांतअपूर्णांकाचा अपूर्णांक, अथवाकित्येक अपूर्णांकांमध्यें चालिहूनजेजोडलेअसतात; जसें, ३/४ चा १/२ अथवा १/३ चे १/६ चे ३/५

भागानुबंध पूर्णांकतोचहोय, ज्यांत पूर्णांक लिहून त्यापुढें जवळच अपूर्णांक लिहिला आहे; जसें, ३ १/२ अथवा १५ ३/४ अथवा २१ ७/१२

मिश्र अपूर्णांक तोचआहे, ज्याचे अंश आणि छेद दोनही सम, विषम, अथवा भागानुबंध आहेत; जसें, १/२, अथवा २/३ अथवा ३/५ अथवा इत्यादि. हे सर्व मिश्र अपूर्णांक आहेत.

कोणत्याही पूर्णांकास छेदस्थळीं एक लिहिल्यानें अपूर्णांकाचें रूप तें; जसें, जर ३ या पूर्णांकास अपूर्णांकाचें रूपद्यावयाचें आहेतरत्या लिहिण्याची रीति ३/१ अशी आहे जसें ५/१ इत्यादि.

कोणताही अपूर्णांक भागाकार दाखविता; म्हणून अंशछेदांनीं गून जोभागाकार उत्पन्नहोतो त्याचे बराबर त्या अपूर्णांकाचा भावआहे.

जसें $\frac{१२}{४}$ या अपूर्णांकाचा भाव ३ याचे बरोबर आहे; आणि $\frac{२१}{५}$ याचा भाव ४ $\frac{१}{५}$ याचे बराबर आहे.

व्यवहारी अपूर्णांकाचा रूपभेद.

व्यवहारी अपूर्णांकाचा रूपभेद ह्मणजे त्यास एका रूपांतून किंवा नावांतून दुसऱ्या रूपांत किंवा नावांत आणण्याचा प्रकार आहे, आणि व्यवहारी अपूर्णांकाची मिळवणी, वजाबाकी इत्यादि करायासाठीं अगोदर त्यांस हा प्रकार केला पाहिजे; असा रूपभेद यावयाचे कितीएक प्रकार आहेत. आहेत.

कृत्य.

दोन किंवा अधिक संख्यांचा दृढ भाजक काढायाचें.

दोन किंवा अधिक संख्यांचा दृढभाजक तीच संख्या आहे, जीत्या संख्यांस निःशेष भागिते: जसें, १८ आणि २४ या दोन संख्या २, ३, ६, यांणीं निःशेष भागिल्या जातात, परंतु यांत मोठी संख्या ६ तीस दृढ भाजक ह्मणतात.

रीति

जर दोन संख्या मात्र असतील, तर त्यांत जी मोठी संख्या असेल ती लाहान संख्येने भागावी; नंतर, बाकी राहील तो नवा भाजक करून त्याणें पूर्व भाजक भागावा; याप्रमाणें शेवटील बाकीनें तत्पूर्वभाजक पुनःपुनः भागितां ज्या भाजकाने शेवटील भाज्य निःशेष होईल तो उच्छिलेसंख्यांचा दृढभाजक होय.

जेव्हां संख्या दोहोंपेक्षां अधीक असतील, तेव्हां त्यांतून पहिलेदोहोंचा पूर्वी सांगितल्याप्रमाणें दृढभाजक काढ; नंतर, हा दृढभाजक आणि राहिलेली संख्या यांचा दृढभाजक काढ: या रीतीनें जितक्या संख्या राहिल्या असतील त्यांचा दृढभाजक काढावा; ह्मणजे शेवटील दृढभा-

जक काढावा; म्हणजे शेवटील दृढभाजक जो उत्पन्न होतोतो सर्व सांगितल्या संख्यांचा दृढभाजक आहे.

जर असें होतें कीं, अशारीतीनें दृढ भाजक १ मात्र निघतो; तर - अशासंख्यांस अदृढभाजक ह्मणतात, म्हणजे त्यांस दृढभाजक नाहीं; अथवा असें म्हणतात कीं त्या संख्या परस्पर अविभाज्य* आहेत.

---

* अविभाज्य संख्या त्या आहेत, ज्यांस एकावांचून दुसरा भाजक निःशेषभागित नाहीं; जसें, २,३,५,७,११,१३,१७, इत्यादि. या संख्यांचाशोध पूर्वकाळापासून चालत आहे, आणि अशी संख्या जाणायासाठीं एक चांगलारीति आजच्या दिवशीं अपेक्षितआहे.

(इरातास्थेनीस्) यानामें एक मोठा ज्योतिषी मिश्रदेशांत होता, त्याणें या अपेक्षिता साठीं एक युक्ती काढिली, जीस त्याणें चालनी असें नाव ठेविलें; कांकी त्या युक्तीनें अविभाज्य संख्या इतर संख्यांहून निराळ्या करितां येतात, आणि अशारीतीस विषम म्हणतात कांकीं फार मोठ्या विस्तारा वांचून थोडक्यात सरळरीतीनें, कोणती ही संख्या आरंभ आहे कीं नाहीं हें समजतां येतनाहीं. अशी विस्तारशीति आजपर्यंत चालली आहे ती ही आहे.

एकापासून कोणतेही इछिले संख्येपावेतों सर्वविषम संख्या अनुक्रमानें लिही, जसें,

१	३	५	७	९	११	१३	१५	१७	१९
२१	२३	२५	२७	२९	३१	३३	३५	३७	३९
४१	४३	४५	४७	४९	५१	५३	५५	५७	५९
६१	६३	६५	६७	६९	७१	७३	७५	७७	७९
८१	८३	८५	८७	८९	९१	९३	९५	९७	९९

आतां प्रथमच्या अविभाज्य संख्ये पासून आरंभकर, आणि ती पासून तिसऱ्या संख्येवर एक एक बिंदुकर; कांकीं तीती संख्या तिहींनी निःशेष भागिली जाते. जसें, ९, १५, २१, इत्यादि.

नंतर पांचांपासून पांचवे पांचवे स्थळीं बिंदुकर, कांकीं तीती संख्या पांचानीं निःशेष भागिलीजाते. जसें, १५, २५, ३५, इत्यादि.

पुनः ७ पासून सातवे सातवे संख्येवर बिंदुकर, कांकी तीती संख्या सातांनी निःशेष भागिली जाते, जसें, २१, ३५, ४९, इत्यादि.

असेंकेलेंअसतां सर्वसंख्याज्या बिंदूवांचूनआहेत त्या अविभाज्य संख्याजाणाव्या; म्हणून ७आणि ४ १०० यादोहीं संख्यांच्या मध्यें कोणतीही अविभाज्य संख्यानाहीं; कांकीं जर कोणतीहीसंख्या कोणतेही अविभाज्यसंख्येनें निशेष भागिलीजातनाहीं, परंतु ती अविभाज्य संख्या अशी असावीकी सांगितल्या संख्येच्ये वर्गमूळापेक्षांउणी; तर असें जाणावेंकीं सांगितली संख्या स्वतः अविभाज्य संख्याहोय; सर्वसमसंख्यांमध्यें २ही समसंख्यामात्र अविभाज्य संख्या आहे, ह्मणून दोहोंपासून १००पर्यंतपुढें सांगतों या संख्या अविभाज्य संख्याआहेत; २,३,५,७,११,१३, १७.१९,२३,२९,३१,३७, ४१,४३,४७.५३,५९,६१,६७,७१.७३,७९, ८३, ८९,९७,

या चालनीवांचून दुसरी थोडक्यात कोणतीहि रीतिनाहीं, कीं जिणेंकरून अविभाज्यसंख्या समजातयेईल; म्हणजे आजपावेतो ज्योतिषामध्यें अशी रीतिसापडलीनाहीं.

उदाहरणें.

प्रथम, १९०८, ९३६, आणि ६३० यांचा दृढभाजक काढ.

९३६) १९०८ (२ म्हणजे १९०८ आणि ९३६ यांचा दृढभाजक ३६ आहे.
१८७२

३६) ९३६ (२६ नंतर ३६) ६३० (१७
७२   ३६
२१६   २७०
२१६   २५२
..   १८) ३६ (२
३६

याजकरितां सांगितल्या संख्यांचा दृढभाजक १८ आहे.

दुसरें. २४६ आणि ३७२ यांचा दृढभाजक काय ?

उत्तर, ६

तिसरें, ३२४, ६१२ आणि १०३२ यांचा दृढभाजक काय ?

उत्तर. १२

प्रथमप्रकार.

अपूर्णांकाचा अतिसंक्षेप करायाचा.

⁂ सांगितल्या पूर्णांकाच्या पदांस कोणत्याही संख्येनें भाग, कीं जिणें निःशेषहोईल; नंतर जे भागाकार येतील त्यांस तशारितीनें दुसरे संख्येनें भाग; असें पुढेंही कर जों पर्यंत एकावांचून दुसरे कोणतेहीसंख्ये

⁂ स्पष्ट आहेकीं जरसांगितल्या अपूर्णांकांचे पदांस भलत्या एकाच अंकानें भागिलें तर दुसरा अपूर्णांक उत्पन्नहोईल, त्याचाभावसांगितल्या अपूर्णांकाबरोबर होईल. आणि अशारितीनें जोंचालेल तों पुनःपुनः भागाकार केला आहे. अथवा भाजक अतिदृढ आहे ते व्हां ही स्पष्ट आहे कीं नवीं अपूर्णांकाचीं पदें जीं उत्पन्न होतात त्या पेक्षां संक्षेप पडायास अशक्य.

पाहा, १, कोणत्याही संख्येचा शेवटीं जरसम अंक अथवा शून्य असेल, तर ती सर्वसंख्या २ यांनी भागिली जाईल.

२, कोणत्याही संख्या ज्याच्या शेवटीं ५ किंवा ० आहे त्या सर्व ५नी भागिल्या जातील.

३, जर कोणत्याही संख्येच्या उजवे कडे शेवटीं ० आहे तर त्या सर्व संख्या १०नीं भागिल्या जातील; जर दोन शून्यें असतील तर त्या सर्वसंख्या १००नीं भागिल्या जातील; जर तीन शून्यें असतील तर १०००नी भागिल्या जातील आणि असें पुढेंही, म्हणजे असा भागाकार करायासाठीं शून्यें मात्र काढिलीं पाहिजेत.

४, जर कोणतेही संख्येचे शेवटील दोन अंक चोंहोंनी भागिले जातील तरतीसर्व

नें भागितां नयेईल, ह्मणजे ते शेवटील भागाकार सांगितल्या अपूर्णांक प दांचा संक्षेप झाला.

अथवा सांगितल्या अपूर्णांकाचे पदांस त्यांच्या दृढभाजकानें एकदां च भाग मग अशारीतीनें जे भागाकार येतील तीं इच्छिले अपूर्णांकाचीं प दें सांगितले अपूर्णांकाच्या पदांबराबर आहेत.

उदाहरणें.

प्रथम, $\frac{२१६}{२८८}$ यांस अतिसंक्षेपरूपदे.

$\frac{२१६}{२८८}=\frac{७२}{९६}=\frac{३६}{४८}=\frac{१२}{१६}=\frac{६}{८}=\frac{३}{४}$ हेंउत्तर.

अथवायाप्रमाणें.

२१६)२८८(१ या करितां दृढभाजक ७२ आहे.
  २१६
  ७२)२१६(३ आणि ७२)$\frac{२१६}{२८८}=\frac{३}{४}$ हें उत्तर वरचेसारिखेंं.
    २१६
    ...

संख्या चोहोनी भागिलीजाईल. आणि शेवटील ३ अंकजर ८ नीभागिले जातील तर - ती सर्व संख्या आठांनी भागिली जाईल. असेंपुढेंही.

५, जर कोणतेही संख्येचे सर्व अंकाची बेरीज तिहीनी किंवा नवांनी भागिलीजाईल तर ती सर्व संख्या तिहींनीं किंवा नवांनी भागिली जाईल.

६. जर उजवे शेवटीचाअंक समआहे; आणि सर्व अंकांची बेरीज ६नीं भागिली जाईल. तरीती सर्व संख्या साहानीं भागिली जाईल.

७. जर कोणत्याही संख्येचे विषम स्थळींचे अंकाची बेरीज समस्थळींचे अंकांचे बेरजे बराबर आहे. तरती सर्व संख्या ११ नी भागिली जाईल.

८, जर कोणतीही संख्या आपल्या वर्गमूळाहून उण्या संख्येनें निःशेष भागिली जातनाहीं. तर ती अविभाज्य संख्याजाणावी. ती एकावांचून कोणत्या ही अंकानें भागायास अशक्य.

९. दोन आणि पांच यांशिवाय सर्वअविभाज्य संख्यांचे एकंचेस्थळीं हे अंक असतात, १, ३, ७, किंवाः ९; आणि यांशिवाय दुसऱ्या सर्वसंख्या ८ कं पुरेंटः आहेत ह्मणून भागिल्या जातील.

१०. जेव्हां कोणत्याही संख्या धन किंवा ऋणचिन्हांनी जोडिल्या असून, त्यास कोणतेही दुसरे संख्येनें भागायाचें आहेतर या प्रत्येक संख्येस वेगळेंवगळें भागिलें पाहिजे; जसें $\frac{१०+८-४}{२}=५+४-२=७$

११, परंतु जो संख्या गुणाकाराच्या चिन्हानें जोडिली आहे तर त्यांतील एकचसंख्या भागावी. जसें.

१०+८+३ = १०+४+३ = १०+४+३ = १+३+१ = ३० = २०

दुसरें, $\frac{१९५}{७८०}$ यांस अतिसंक्षेप रूपदे.

उत्तर, $\frac{१}{४}$

तिसरें, $\frac{१३६}{२०४}$ यांस अतिसंक्षेपरूपदे.

उत्तर, $\frac{२}{३}$

चवथें, $\frac{५२५}{६३०}$ यांस अतिसंक्षेप रूपदे.

उत्तर, $\frac{५}{६}$

दुसरा प्रकार.

भागानुबंध पूर्णांकास बरोबर भावाचें विषम अपूर्णांकाचें रूप द्यावयाचा.

* पूर्णांकास अपूर्णांकाचे छेदानीं गुण आणि त्या गुणाकाराशीं अंश मिळीव; नंतर ही बेरीज अपूर्णांकाचे वरले भागास अंशस्थळीं लिही, म्हणजे इच्छिलें काम झालें.

उदाहरणें.

प्रथम, २३ $\frac{२}{५}$ यांस बराबर भावाचें अपूर्णांकाचें रूप दे.

$\frac{२}{५}$ अथवा याप्रमाणें $\frac{(२३\times५)+२}{५}=\frac{११७}{५}$ हें उत्तर.

दुसरें, १२ $\frac{७}{९}$ यांस बराबर भावाचें अपूर्णांकाचे रूप दे.

उत्तर, $\frac{११५}{९}$

तिसरें, १४ $\frac{७}{१०}$ यांस बराबर भावानें अपूर्णांकाचेंरूपदे.

उत्तर, $\frac{१४७}{१०}$

चवथें, १८३ $\frac{५}{२१}$ यांस बराबर भावाचें अपूर्णांकाचेंरूपदे. उत्तर, $\frac{३८४८}{२१}$

* स्पष्ट दिसतें कीं वरची रीति उघडी आहे, कां कीं कोणत्याही अवयवीस असल्यास संख्येनें गुणावें आणि तो गुणाकार त्याच संख्येनें भागावा हीं दोनही बराबर भावाचीं आहेत म्हणजे असतें हा अपूर्णांक हेंच दाखवितात, कीं अंशास छेदानें भागावें.

तिसरा प्रकार.

विषम अपूर्णांकास बरोबर भावाचें पूर्णांकाचें अथवा भागानुबंध पूर्णांकाचें रूप द्यावयाचा.

* अंश छेदानीं भाग, भागाकार येईल तो इच्छिला पूर्णांक अथवा भागानुबंध पूर्णांक होईल.

उदाहरणें.

प्रथम, $\frac{१२}{३}$ यांस बरोबर भावाचें रूप दे.

आतां $\frac{१२}{३}$ अथवा १२÷३=४ हें उत्तर,

दुसरें, $\frac{१५}{७}$ यांस बरोबर भावाचें रूप दे.

आतां $\frac{१५}{७}$ अथवा १५÷७=२ $\frac{१}{७}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{७५९}{१७}$ यांस बरोबर भावाचें रूप दे.

याप्रमाणे १७)७५९(४४ $\frac{१}{१७}$ हें उत्तर.

```
    ६८
    ──
     ६९
     ६८
     ──
      १
```

चवथें, $\frac{५६}{७}$ यांस बरोबर भावाचें रूप दे.

उत्तर. ८

पांचवें, $\frac{१३६२}{२५}$ यांस बरोबर भावाचें रूप दे.

उत्तर. ५४ $\frac{१२}{२५}$

साहावें, $\frac{२९१८}{१७}$ यांस बरोबर भावाचें रूप दे.

उत्तर, १७१ $\frac{११}{१७}$

चौथा प्रकार.

पूर्णांकास बरोबर भावाचें अपूर्णांकाचें रूप द्यावयाचा, ज्याचे छेद सांगितले संख्येबरोबर होतील.

---

* स्पष्ट आहे की, ही रीति पूर्वरीतीचीच उलट आहे; आणि ह्याचें कारण सरळ भागाकाराचे गुणापासून प्रकट आहे.

* पूर्णांकास सांगितले छेदानीं गुण; आणि त्यागुणाकाराखालीं सांगितले छेदलिहि, ह्मणजे इच्छिले अपूर्णांक रूपझालें.

उदाहरणें.

प्रथम, यांसबरोबर भावाचें अपूर्णांकाचें रूपदे, ज्यास छेद ७ होतील.

आतां ९+७=६३; तेव्हां $\frac{६३}{७}$ हें उत्तर.

म्हणजे $\frac{६३}{७}$ = ६३÷७ = ९ हा ताळा.

दुसरें, १२ यांस बरोबर भावाचें अपूर्णांकाचें रूपदे, ज्यास छेद १३ होतील. उत्तर, $\frac{१५६}{१३}$

तिसरें, २७ यांसबरोबरभावाचें अपूर्णांकाचें रूपदे. ज्यास छेद ११ होतील.

उत्तर, $\frac{२९७}{११}$

पांचवा प्रकार.

प्रभागजाति अपूर्णांकास बरोबर भावाचें भागजाति अपूर्णांकाचें रूप द्यावयाचा.

*; अंशाकरितां सर्व अंशपरस्परगुण. आणि छेदांकरितां सर्वछेद परस्पर गुण. ते नवे अंश छेदइच्छिले अपूर्णांक रूपझालें.

प्रभागजाति अपूर्णांकामध्यें जरपूर्णांक अथवा भागानुबंधपूर्णांक असेल. तर त्यास पूर्वरीतीनें अपूर्णांकाचें रूपद्यावें.

जर अपूर्णांकांतील भलतीं अंशछेदरूप दोन पदें भलते एका अंकानें निःशेषभागिलीं जातील तरते भागाकार त्यांचे स्थळीं कामांत घेतां येतील; अथवा अंशछेदरूप कोणतीही दोन पदें समान असतील तरतीं रद्दकरितां येतील.

---

* यांत गुणाकार आणि भागाकार हे दोनही कामांत आणिले आहेत, याजकरितां उत्पन्न झालेलें फळ सांगितले अवयवींचें बरोबर भावाचें, होईल.

---

*; यारीतीच्या सत्यता याप्रमाणे दाखविली जाते, सांगितले प्रभाग जाति अपूर्णांक [illegible] चे [illegible] असावे. आतां [illegible] चा [illegible] = [illegible] = [illegible]; याजकरितां [illegible] चे [illegible] = [illegible] + [illegible] = [illegible]; ह्मणजे या अपूर्णांकाचे अंश सांगितले अपूर्णांकोचे अंशाचे गुणाकाराबरोबर आहेत, आणि याचे छेद सांगितले अपूर्णांकाचे छेदांचे गुणाकारा बराबर आहेत. तेव्हां प्रभागजातिअपूर्णांकांत दोहोंपेक्षां अधिक रकमा आहेत, तेव्हां वरप्रमाणें दोन रकमांस भागजाति रूपदेऊन त्यांसि तिसरीरकमजोडून ह्मि हि त्या तीन रकमांचे बराबर भावाच्या होतील; याप्रमाणें अधिक असतील तरीही.

उदाहरणें.

प्रथम, $\frac{३}{४}$ चे $\frac{२}{३}$ चा $\frac{१}{२}$ यांस बराबर भावाचें भागजाति अपूर्णांकाचें-रूप दे.

आतां $\frac{३+२+१}{४+३+२} = \frac{६}{२४} = \frac{१}{४}$ हें उत्तर.

अथवा $\frac{३+२+०}{४+३+२} = \frac{१}{४}$ दोनठिकाणीं २ आणि दोनठिकाणीं ३ रद्द केल्यानें.

दुसरें, $\frac{१०}{११}$ चे $\frac{३}{५}$ चे $\frac{२}{३}$ यांस बराबर भावाचें भागजाति अपूर्णांकाचें रूप दे.

आतां $\frac{१०+३+२}{११+५+३} = \frac{६०}{१६५} = \frac{४}{११}$ हें उत्तर,

अथवा $\frac{१०+३+२}{११+५+३} = \frac{४}{११}$ वरच्याप्रमाणें दोनठिकाणीं ३ रद्द करून आणि दोन स्थळीं ५ नीं भागून.

तिसरें, $\frac{४}{५}$ चे $\frac{३}{७}$ यांसबराबर भावाचें भागजाति अपूर्णांकाचें रूपदे.

उत्तर, $\frac{१२}{३५}$

चवथें, $\frac{५}{९}$ चे $\frac{३}{५}$ चे $\frac{२}{३}$ यांस बराबर भावाचें भागजाति अपूर्णांकाचें रूपदे.

उत्तर, $\frac{२}{९}$

पांचवें, ३ $\frac{१}{२}$ चे $\frac{५}{८}$ चे $\frac{२}{५}$ यांसबराबर भावाचें भागजाति अपूर्णांकाचें रूपदे.

उत्तर, $\frac{७}{८}$

साहावें, ४ चे ३ $\frac{१}{२}$ चे $\frac{५}{८}$ चे $\frac{३}{७}$ यांस बराबर भावाचें भागजाति अपूर्णांकाचें रूपदे,

उत्तर, २ $\frac{१}{२}$

सातवें, $\frac{५}{६}$ चे $\frac{७}{५}$ आणि २ यांसबराबर भावाचें भागजाति अपूर्णांकांचें रूपदे.

उत्तर, २ $\frac{१}{३}$

साहावा प्रकार.

वेगळे वेगळे छेदांचे अपूर्णांकास बरोबर भावाचे अपूर्णांक रूप द्यावयाचा- ज्याचे छेद सम होतील.

नवे अंशाकरितां, प्रति अपूर्णांकाचे वेगळे वेगळे अंश त्याचे त्याचे खा-लचे छेदांवांचून सर्व छेदानीं गुण; आणि समछेदांकरितां सर्व छेदा

स परस्परगुण. *

पाहा, याकामांत आणि दुसरे कितीएक कामांत जर सांगितलेसंख्यामध्यें पूर्णांक, अथवा भागानुबंध पूर्णांक, किंवा प्रभागजाति अपूर्णांक असतील तर त्यांस आरंभीं सांगितले पूर्वरीतीं करून सरळ अपूर्णांकाचें रूप दिलेंपाहिजे.

उदाहरणें.

प्रथम, $\frac{१}{२}$, $\frac{२}{३}$ आणि $\frac{३}{४}$ यांस बरोबर भावाचें समछेद अपूर्णांक रूपेंद.

१ + ३ + ४ = १२ हा $\frac{१}{२}$ चा नवा अंशआहे.
२ + २ + ४ = १६ हा $\frac{२}{३}$ चा नवा अंश आहे.
३ + २ + ३ = १८ हा $\frac{३}{४}$ चा नवाअंश आहे.
२ + ३ + ४ = २४ हा सर्वांचासमछेद आहे.

याजकरितां सांगितले वेगळे वेगळे अपूर्णांकांचेबराबरभावाचे हे अपूर्णांक आहेत. $\frac{१२}{२४}$, $\frac{१६}{२४}$ आणि $\frac{१८}{२४}$

अथवा हेंकाम मनांत गुणाकार करून वेगळाल्या रकमा एकदांच लिहितां येतील, जसें, $\frac{१}{२}$, $\frac{२}{३}$, $\frac{३}{४}$ = $\frac{१२}{२४}$, $\frac{१६}{२४}$, = $\frac{१८}{२४}$, अथवासंक्षेपानें = $\frac{६}{१२}$, $\frac{८}{१२}$, $\frac{९}{१२}$.

जेव्हां नवे अंश आणि समछेद यांचा दर्दाकंवा साधारण भाजक असेल, तरत्या वेगळाले संख्यांचे स्थळीं त्यांचे त्यांचे कर्तेलिहि, नंतर असेवेगळेवेगळे कर्तेजे अंश आणि छेद या दोन स्थळीं साधारण आहेत त्यांस त्या त्या स्थळांतून रद्दकर, म्हणजे अपूर्णांकास अतिसंक्षेपरूपझालेंज्यापासून समछेद होतील.

दुसरें, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{६}$ आणि $\frac{१}{८}$ यांसबरोबर भावानें समछेद अपूर्णांकरूपेंद.

आतांया अपूर्णांकांस सांगितलेप्रमाणे समछेदकरून हेंरूपहोतें.

$\frac{६ + ८}{४ + ६ + ८}$ $\frac{४ + ८}{४ + ६ + ८}$, $\frac{४ + ६}{४ + ६ + ८}$, आतां २, आणि २, यासंख्या ४, ६, आणि ६, ८, यांचे अनुक्रमें भाजक आहेत; याजकरितां जर प्रथमआणि तिसरे या अपूर्णांकांत ६ टाकून त्यांचेकर्ते २, आणि ३ हे लिहिले, आणि दुसरे अपूर्णांकांत ६, ४, आणि ८, यांस टाकून त्यांचेस्थळीं त्यांचे

---

* यापासून स्पष्ट आहे कीं, अंश आणि छेद हे एकच संख्येनें गुणिल्या पासून जोनवा अपूर्णांक उत्पन्न होतो. तो पूर्व अपूर्णांकांचेच भावाचा, त्याचेवरचे भावांत भेदहोत नाहीं.

वेगळाले कर्ते २ आणि ३ हे लिहिले. तरत्या अपूर्ण अंकास हें रूप होईल. $\frac{२+३+९}{४+२+३+९}$, $\frac{२+२+३+३}{४+२+३+९}$, आणि $\frac{४+२+३}{४+२+३+९}$, एथें २ आणि ३ हे दोन कर्तेजे अंश आणि छेद यांत साधारण आहेत त्यांस रद्द करून अपूर्णांकास हें रूप होतें. $\frac{९}{४+९}$, $\frac{२+३}{४+९}$, $\frac{४}{४+९}$, म्हणजे = $\frac{९}{३६}$, $\frac{६}{३६}$, आणि $\frac{८}{३६}$ यांतजी ३६ समछेद संख्या उत्पन्न झालीती ४, ६, ९, यांचा साधारण गुणाकार आहे. अथवा यासंख्यांनीं ती निःशेष भागिलीजाते. आणियाशिवाय कोणतेही दुसरे सांगितले संख्यांचा लघुतम साधारण गुणाकार उत्पन्न होईल. परंतु अशासंख्या छेद असून त्यांचे अंशस्थळीं १ असावा.

परंतु लघुतम साधारण गुणाकार त्वरेनें काढायाची रीतीहा आहे.

सांगितल्या संख्या एक ओळींत लिहि, आणि जर त्यांतील २ किंवा अधिक संख्या २या अविभाज्य संख्येनें भागल्याजातात. तर त्यांसभागून त्यांचे भागाकार त्यांचे त्यांचे खालीं दुसरे ओळींत लिहि, आणि ज्या भागांत नाहींत त्या त्यांचे खालीं दुसरे ओळींत पुनः लिहि; = या दुसरे ओळीस तसेंच २नीं भाग पुढेंतिसरीस, इत्यादि. असेंकरितांजर २या संख्येनें भागिल्याजाततनाहींतर ३या अविभाज्य संख्येनें भाग त्याणेंहीसर्वभागत नाहींतर ५, ७, इत्यादि अविभाज्य संख्यांनी भाग जोंपर्यंत दोनसंख्य भागल्यावांचून राहतील. नंतर ते सर्वभाजक आणि शवटील ओळींतील भागाकार व भागल्यावांचून राहिलीसंख्या हे सर्वपरस्पर गुणून जो गुणाकार होइल तो लघुतम साधारण गुणाकारहोय.

उदाहरण, ७, २४, ४०, ४५, आणि ७२ यांचा साधारणगुणाकार काढ.

२)	७	२४	४०	४५	७२
२)	७	१२	२०	४५	३६
२)	७	६	१०	४५	१८
३)	७	३	५	४५	९
३)	७	१	५	१५	३
५)	७	१	५	५	१
५)	७	१	१	१	१

तेव्हां २+२+२+३+३+५+७ = २५२० हा इच्छिला लघुतम-साधारणगुणाकार आहे, अथवा ७ २४, ४०, ४५, आणि ७२च्या

सर्व संख्यानीं हा निःशेष भागाकार शक्य आहे.

दुसरें. २७. ६६. १३५, २७५. आणि. ६७५. याचा लघुतम साधारण गुणाकार काढ.

३)	२७	६६	१३५	२७५	६७५.
३)	९	२२	४५	२७५	२२५
३)	३	२२	१५	२७५	७५
५)	१	२२	५	२७५	२५
५)	१	२२	१	५५	५
११)	१	२२	१	११	१
	१	२	१	१	१

तेव्हां ३+३+३+५+५+११+२=१४८५० हा इच्छिलेला लघुतम साधारण गुणाकार आहे.

जेव्हां अपूर्णांक अथवा भागानुबंध पूर्णांक सांगितले आहेत, तेव्हा शेवटन्यास विषम अपूर्णांकाचें रूपदे; आणि अतिसंक्षेप समछेद कर; नंतर अंशांचे लघुतम साधारण गुणाकारास अशा अतिसंक्षेप सम छेदानें भागून जो भागाकार येईल तो इच्छिला अंश अपूर्णांकांचा लघुतम साधारण गुणाकार झाला.

उदाहरण, ४ $\frac{१}{६}$. ५ $\frac{१}{३}$ आणि $\frac{५}{९}$ म्हणजे $\frac{२५}{६}$. $\frac{१६}{३}$. $\frac{५}{९}$ यांचा लघुतम साधारण गुणाकार काढ.

अपूर्णांकांस अतिसंक्षेप समछेद करून हें रूप होतें $\frac{७५}{१८}$. $\frac{९६}{१८}$ आणि $\frac{१०}{१८}$ आणि, ७५, ९६, १० यांचा लघुतम साधारण गुणाकार २४०० आहे. त्यास १८ यांणीं भागून भागाकार १३३ $\frac{१}{३}$ हा इच्छिला लघुतम साधारण गुणाकार झाला.

जेव्हां सांगितले दोन अपूर्णांकांतील एकाचा छेद दुसऱ्याचें छेदास निःशेष भागितो, तेव्हां त्या लहान अपूर्णांकाचीं दोनही पदें त्या भागाकारानें गुण. म्हणजे दोन ही सम छेद झाले.

जसें $\frac{३}{४}$ आणि $\frac{५}{८}$ यांस समछेद करायासाठीं लाहान अपूर्णांक यास २ नीं म्हणजे ८ ÷ ४ = २ यांणीं गुणायाचें इतकेंच मात्र आहे. असें करून त्यांस हें रूप होतें, $\frac{६}{८}$ आणि $\frac{५}{८}$

आणि $\frac{२}{३}$, $\frac{५}{६}$, $\frac{११}{१२}$ यांससमछेद करायासाठीं $\frac{२}{३}$ यांचीं दोन पदें ४ यांणीं गुणायाचीं, आणि $\frac{५}{६}$ याचीं २नीं इतकेंमात्र आहे; ह्मणजे असें करून त्याचें हें इच्छिलें रूपझालें, $\frac{८}{१२}$, $\frac{१०}{१२}$, $\frac{११}{१२}$.

अथवा याप्रमाणें.

सांगितले अपूर्णांकास अतिसंक्षेपरूप देऊन, छेदांचा लघुतमसाधारण गुणाकार काढ, नंतर त्या गुणाकारास वेगळाले सांगितले छेदानीं-भागून, जेजे भागाकार येतील, ते त्याचेत्याचे अंशानें गुण; नंतर त्यात्यागुणाकार अंशा खालीं लघुतम साधारण गुणाकार लिहि, म्हणजे सांगितले अपूर्णांकास बरोबर भावाचें अति संक्षेप समछेद रूप झालें.

उदाहरण, $\frac{३}{१४}$, $\frac{५}{२२}$, आणि $\frac{१०}{१२१}$ यांस अतिसंक्षेप समछेदरूप दे.

१४, २२, १२१ यांचालघुतम साधारण गुणाकार = १६९४

$$\left.\begin{array}{l}\frac{१६९४}{१४} = १२१ \\ \frac{१६९४}{२२} = ७७ \\ \frac{१६९४}{१३१} = १४\end{array}\right\}$$ हे तीन वेगळाले भागाकार ज्याणींअंश गुणायाचे आहेत.

तेव्हां
$$\left.\begin{array}{l}१२१+३ = ३६३ \\ ७७+५ = ३८५ \\ १४+१० = १४०\end{array}\right\}$$ हे. इच्छिले अंश आहेत.

आणि $\frac{३६३}{१६९४}$, $\frac{३८५}{१६९४}$, $\frac{१४०}{१६९४}$, हे इच्छिले अतिसंक्षेपसमछेद रूपाचे अपूर्णांक झाले.

पाहा, अपूर्णांकांस समछेदरूप दिल्यानें त्यांत अधिक भावाचा कोणता आहे हें ही सत्वर कळतें, जर $\frac{३}{७}$ $\frac{५}{९}$ यांस समछेदरूप $\frac{२७}{६३}$, $\frac{३५}{६३}$, हें दिल्यानें $\frac{५}{९}$ हे अधिक भावाचे आहेत हें उघड समजतें, कांकीं $\frac{३५}{६३}$ हे $\frac{२७}{६३}$ यांहून अधिक आहेत.

दुसरींउदाहरणें.

प्रथम, $\frac{२}{७}$ आणि $\frac{५}{९}$ यांस बरोबर भावाचेंसमछेदअपूर्णांकरूपदे.

उत्तर, $\frac{१८}{६३}$, $\frac{३५}{६३}$.

दुसरें. $\frac{२}{३}$, $\frac{३}{५}$ आणि $\frac{३}{७}$ यां बरोबर भावाचें समछेद अपूर्णांक

रूपदे.

उत्तर, $\frac{४०}{६०}, \frac{३६}{६०}, \frac{४५}{६०}$,

तिसरें, $\frac{५}{६}$, $२\frac{३}{५}$ आणि ४ यांस बरोबरभावाचें समछेद अपूर्णांक रूपदे.

उत्तर, $\frac{२५}{३०}, \frac{७८}{३०}, \frac{१२०}{३०}$.

चवथें, $\frac{३}{२५}$ आणि $\frac{४}{३५}$ यांस बरोबर भावाचें समछेद अपूर्णांक रूपदे.

उत्तर, $\frac{२१}{१७५}$ आणि $\frac{२०}{१७५}$.

पांचवें, $\frac{३}{७}$ आणि $\frac{५}{१४}$ यांसबरोबर भावाचें समछेद अपूर्णांक रूपदे.

उत्तर, $\frac{६}{१४}$ आणि $\frac{५}{१४}$.

साहावें. $\frac{२}{३}$ $\frac{३}{४}$ आणि $\frac{७}{८}$ यांसबरोबर भावाचें समछेद अपूर्णांक रूपदे.

उत्तर. $\frac{१६}{२४}, \frac{१८}{२४}$, आणि $\frac{२१}{२४}$.

सातवा प्रकार.

मिश्रअपूर्णांकांस शुद्धअपूर्णांकाचेंरूप द्यावयाचा.

अपूर्णांकांचे दोनही अवयवांत सरळ अपूर्णांकाचें रूपदे; नंतर प्रत्यंकाचा अंश दुसऱ्याच्या छेदानें गुण, हें काम पूर्वप्रमाणेंच आहे, एक एक अवयव बरोबर संख्येनें गुणिला असतां भावांतभेद होतनाहीं.

जसें, $\frac{\frac{५}{३}}{२} = \frac{५}{६}$ आणि $\frac{२\frac{१}{३}}{४} = \frac{७}{१२}$ आणि $\frac{३}{४}\frac{\frac{३}{५}}{२} = \frac{१७}{\frac{५}{\frac{६}{२}}} = \frac{१७}{५} + \frac{२}{६} = \frac{३८}{१५}$

आठवा प्रकार.

कोणतेही अपूर्णांकाचा भाव आपले पूर्णांकाचे अवयवांत काढायाचा.

पूर्णांकांत जर अनेक भावांचे अवयव आहेत तर त्यांस विविधगुणाकार रीतीनें अंशांस गुणावें, आणि तो गुणाकार विविध भागाकार रीतीनें छेदानें भाग.

अथवा जर पूर्णांक कोणतेही भावाचा १ या संख्येचा असेलतर, त्यांत त्याचे खालचे भावाचे किती अवयव आहेत त्या संख्येनें अंश गुणावा, आणि तो गुणाकार छेदानें भागावा. नंतर जरकांहीं शेष राहील, तर त्या भावाचा खालचे भावाचे अवयव त्या एकांत कितीआ

हेत त्या संख्येनें शेष गुणावें. आणि तो गुणाकार पूर्व प्रमाणें छेदानीं भागावा, इच्छा असेल त्यापावेतों पुढें असेंच कर. नंतर वेगळाले उत्पन्न झालेले भागाकार एकओळींत त्याचे त्याचे स्थळीं लिहावे, ह्मणजे अपूर्णांकाचा इच्छिला भाव झाला.*

उदाहरणें.

प्रथम, २ रुपये ३ पावलेयाचे $\frac{2}{5}$ काय आहेत. रीतीचे प्रथम रूपानें.

रु. पा.
२ . . ३
४
५)११ . . ०
रु. २ . ० . . ८० रे. हें उत्तर,

दुसरे, १ रुपयाचे $\frac{2}{3}$ काय आहेत. रीतीचे दुसरे रूपानें.

$\frac{2}{3}$
४
३)८
२ . २
१००
३)२००
६६ $\frac{2}{3}$

उत्तर. पा. २ . . रे. ६६ $\frac{2}{3}$

तिसरें, १ रुपयाचे $\frac{3}{8}$ हे पूर्णांक. किती भावाचे आहेत तें सांग.

उत्तर. रु. ० पा. १ . . रे. ५० [illegible]

चवथें. १ रुपयाचे [illegible] हे पूर्णांकांत किती भावाचे आहेत तें सांग.

उत्तर. रु. ० पा. ० . . रे. ८८ [illegible]

पांचवें. ५ रुपयांचे $\frac{3}{4}$ हे पूर्णांकांत किती भावाचे आहेत तें सांग.

उत्तर, रु. ३ . . पा. ३ . . रे. ०

साहावें. २ रुपये ३ पावले ५० रे[illegible] यांचे $\frac{3}{5}$ हे पूर्णांकांत किती भावाचे आहेत तें सांग.

उत्तर, रु. १ . पा. ० . . रे. ६[illegible]

सातवें, १ मणाचे $\frac{4}{5}$ हे वजनी पूर्णांकांत किती भावाचे आहेत तें सांग.

उत्तर. ३२ शेर.

आठवें. १ खंडीचे $\frac{3}{16}$ हे केल्ली पूर्णांकांत किती भावाचे आहेत तें सांग.

उत्तर, म. ६ पा. [illegible]

नववें. १ बिघ्याचे $\frac{7}{8}$ हे पूर्णांकांत किती भावाचे आहेत तें सांग.

उत्तर, पां. १७ का. १०

---

* [illegible] गतेंही अपूर्णांकाचा अंश भागाकाराचे शेषासारिखा कल्पिला आहे. आणि छेद भाजकासारिखा याजकरितां ह्या रीतीं आणि विधि भागाकार हीं एक जातीचीं आहेत. अ[illegible] [illegible] अपूर्णांकांतील शेषाचा भाव काढायाचे रीतीचे [illegible] आहेत.

दाहावें. १ दिवसाचे $\frac{३}{१०}$ हे विलायती मानाचे पूर्णांकांत किती मापाचे आहेत ते सांग.

अवर. मि.
उत्तर. ७ १२

नववा प्रकार.

अपूर्णांकास एक जातींतून दुसरे जातींत आणावयाचा.

* हलक्या रूपाचे अवयव त्याचे वरचे भारी रूपाचे एकांत किती आहेत तो विचार करावा; नंतर जर भारी रूपांतून हलक्या रूपांत आणावयाचें आहे तर अंशास त्या संख्येनें गुणावा. परंतु जर हलक्या रूपांतून भारी रूपांत न्यावयाचें आहे तर छेदास त्या संख्येनें गुणावा.

उदाहरणें.

प्रथम. एक रुपयाचे $\frac{३}{८}$ यांस रेसांत अपूर्णांक रूप दे.

$\frac{३}{८} + \frac{४}{१} + \frac{१००}{१} = \frac{१२००}{८}$ . . . . हें उत्तर.

दुसरें. एक रेसाचे $\frac{३}{५}$ यांस रुपयांत अपूर्णांक रूप दे.

$\frac{३}{५} + \frac{१}{१००} + \frac{१}{४} = \frac{३}{२०००}$ . . . . . हें उत्तर.

तिसरें. एक रुपयाचे $\frac{१}{१५}$ यांस रेसांत अपूर्णांक रूप दे.

उत्तर $\frac{८०}{३}$ रेस.

चवथें. वजनी एक मणाचे $\frac{१}{५}$ यांस खंडींत अपूर्णांक रूप दे.

उत्तर, $\frac{१}{१००}$ खंडी.

पांचवें, वजनी एक खंडीचे $\frac{२}{३}$ यांस शेरांत अपूर्णांक रूप दे.

उत्तर. $\frac{१६००}{३}$ शेर.

साहावें, केळी एक शेराचे $\frac{१}{२}$ यांस खंडींत अपूर्णांक रूप दे.

उत्तर, $\frac{१}{१६००}$ खंडी.

सातवें. एक रेसाचे $\frac{१}{८}$ यांस रुपयांत अपूर्णांक रूप दे.

उत्तर. $\frac{१}{३२००}$ रुपया

आठवें एक रुपयाचे $\frac{५}{६}$ यांस रेसांत अपूर्णांक रूप दे.

उत्तर, $\frac{१०००}{३}$ रेस.

नववें. १ पावला ५० रेस यांस रुपयांत अपूर्णांक रूप दे.

उत्तर, $\frac{३}{८}$ रुपया.

---

* अंकास रूपभेद करायासाठी पूर्णांकांत चढती उतरती मांडणी शान सांगितली आहे, ती आणि हीरीति, सारख्या आहेत.

दाहावें, ३ पावले ३३ रेस यांस अपूर्णांकरूपदे.

उत्तर, $\frac{३३३}{४००}$ रूप.

व्यवहारी अपूर्णांकाची मिळवणी.

जर अपूर्णांक समछेद आहेत, तर सर्व अंश एकत्र मिळवून त्याचेरवा लीं समछेद लिहि, ह्मणजे ही वेगळाले अपूर्णांकांची इच्छिली बेरीज झाली.
∗ जर अपूर्णांक समछेद नाहींत तरते समछेद करावे, आणि प्रभाग जाति अपूर्णांक, भागजाति करावे आणि अनेकरूप अपूर्णांक असती ल तर ते एकरूप करावे. नंतर वर सांगितल्याप्रमाणें मिळवणी करावी. भागानुबंध पूर्णांक असल्यास विषम अपूर्णांक रूपदेऊन काम करावें, अथवा त्यांतील अपूर्णांक मात्र घेऊन मिळवणी करावी. नंतर ती बेरी-ज पूर्णांक जोडून लिहावी.

∗ अपूर्णांक समछेद केल्याचे पूर्वी पराकाष्ठा विरूप आहेत. जसें रुपया आणि रेस हे, विरूप किंवा विजाति म्हणून त्याचा एकी भाव होत नाहिं. परंतु त्यांस जे व्हां समछेद केले आणि एकत्र वस्तूचे अवयव झाले तेव्हां त्यांचे अंशांची बेरीज अथवा वजाबाकी सुकर प्रसिद्ध होते, जशी कोणतेही पूर्ण वस्तूंची या पासून यारीतीची सत्यता स्पष्ट आहे मिळव णी अथवा वजाबाकी यांत. जेव्हां कितीएक अपूर्णांकांची मिळवणी करायाची आहे ते व्हां बहुतकरून बरें आहे कीं. त्यांतील दोन अपूर्णांक जे समछेद करण्यास सुगम आहेत ते घेऊन त्यांस समछेद करून त्यांची बेरीज घे: नंतर ती बेरीज आणि दुसरा एक अपूर्णांक यां स समछेद करून बेरीज घे; याप्रमाणे पुढेंही.

पाहा. २. भलते कोणते ही २ अपूर्णांक घेतले, जसें. $\frac{७}{११}$ आणि $\frac{३५}{५५}$ हे बरोबर भावाचे आहेत किंवा नाहींत हें त्यांस समछेद केल्या नंतर त्यांचे अंशापासून प्रसिद्ध होतें. याजकरितां जर ३५+११, आणि ७+५५ याप्रमाणें दोन बरोबर भावाचे गुणाकार उत्पन्न होतात, तर त्यापासून बरोबर भावाचें दोन नवे अपूर्णांक उत्पन्न होतील. जसें, $\frac{३५}{५५}=\frac{७}{११}$, अथवा $\frac{३५}{७}=\frac{५५}{११}$.
तेव्हां जर बरोबर भावाचे दोन अपूर्णांक घेतले, जैसें. $\frac{७}{११}$ आणि $\frac{३५}{५५}$ तेर ३५+११ = ७+५५; या प्रत्येकांतून ७+११ हे वजा करून ही बाकी राहील. (३५−७)+११=(५५−११)+७ याजकरितां हें अपूर्णांक रूप उत्पन्न होतें $\frac{३५}{५५}-\frac{७}{११}=\frac{७}{११}$ अथवा $\frac{२८}{४४}=\frac{७}{११}$.
यारीतीनें हीं जर $\frac{७}{११}$ या अपूर्णांकाचीं पदें $\frac{३५}{५५}$ या अपूर्णांकाचें पेदांशीं अनुक्रमें मिळविलीं तरी ही त्यास बरोबर भावाचें रूप होतें. जसें. $\frac{३५+७}{५५+११}=\frac{४२}{६६}=\frac{७}{११}$.
अथवा सामान्यतः जर $\frac{अ}{ब}$ $\frac{क}{ड}$. तर त्याप्रमाणें दारवविलें जातें कीं. $\frac{अ+क}{ब+ड}=\frac{अ}{ब}=\frac{क}{ड}$.
याजकरितां जेव्हां बरोबर भावाचे दोन अपूर्णांक आहेत, तेव्हां जर त्या दोहोंचे अंशांची बेरीज आणि छेदांची बेरीज अथवा अंशांची वजाबाकी आणि छेदांची वजाबाकी या पासून जे नवे अपूर्णांक उत्पन्न होतील ते त्या पूर्व दोन अपूर्णांकांचे बरोबर भावाचे-आहेत, हे प्रतिपाद्य बहुत उपयोगी आहे असें पुढें प्रमाणदर्शनांत कळेल.

उदाहरणें.

प्रथम. $\frac{३}{५}$ आणि $\frac{४}{५}$ यांचीबेरीजकर.

आतां $\frac{३}{५} + \frac{४}{५} = \frac{७}{५} = १\frac{२}{५}$, हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{३}{५}$ आणि $\frac{५}{६}$ यांचीबेरीजकर.

आतां $\frac{३}{५} + \frac{५}{६} = \frac{१८}{३०} + \frac{२५}{३०} = \frac{४३}{३०} = १\frac{१३}{३०}$ हें उत्तर.

तिसरें. $\frac{५}{८}$ आणि ७ $\frac{१}{२}$ आणि $\frac{३}{४}$ चा $\frac{१}{३}$ यांचीबेरीजकर.

आतां $\frac{५}{८} + ७\frac{१}{२} + \frac{३}{४}$ चा $\frac{१}{३} = \frac{५}{८} + \frac{१५}{२} + \frac{१}{४} = \frac{५}{८} + \frac{६०}{८} + \frac{२}{८} = \frac{६७}{८} =$

हें उत्तर.

चवथें. $\frac{३}{७}$ आणि $\frac{६}{७}$ यांचीबेरीजकायहोते.

उत्तर. १ $\frac{२}{७}$

पांचवें. $\frac{७}{९}$ आणि $\frac{५}{६}$ यांचीबेरीजकायहोते.

उत्तर. १ $\frac{११}{१८}$

सहावें. $\frac{३}{७}$ आणि $\frac{५}{१४}$ यांचीबेरीजकायहोते.

उत्तर. [illegible]

सातवें. [illegible] आणि [illegible] आणि [illegible] यांचीबेरीज कायहोते.

उत्तर. १ $\frac{१०३}{१०५}$

आठवें. [illegible] आणि [illegible] आणि २ $\frac{१}{२}$ यांचीबेरीज कायहोते.

उत्तर. ३ [illegible]

नववें. [illegible] आणि [illegible] चे [illegible] आणि [illegible] यांचीबेरीजकायहोते.

उत्तर. १० [illegible]

दाहावें. एकरुपयाचे [illegible] आणि एकपावल्याचे [illegible] यांचीबेरीज कायहोते.

उत्तर. [illegible]

अकरावें. एकपावल्याचे [illegible] आणि एकरसाचे [illegible] यांचीबेरीज-कायहोते.

उत्तर. [illegible]

बारावें, एकरुपयाचे [illegible] आणिएकपावल्याचे [illegible] आणि एकर-साचे [illegible] यांचीबेरीज कायहोते.

उत्तर. [illegible]

व्यवहारी अपूर्णांकाची वजाबाकी.

जसें मिळवणी करावयाकरितां व्यवहारी अपूर्णांक समजाति समछेद केले, तसे तयार करावे; नंतर भारी अंशांत थोडे अंश वजा करून, बाकी राहील त्याखालीं समछेद लिहावे. म्हणजे इच्छिली वजाबाकी झाली.

उदाहरणें.

प्रथम, $\frac{५}{६}$ आणि $\frac{१}{६}$ यांची वजाबाकी कर.

आतां $\frac{५}{६} - \frac{१}{६} = \frac{४}{६} = \frac{२}{३}$ .... हें उत्तर.

दुसरें. $\frac{३}{४}$ आणि $\frac{५}{९}$ यांची वजाबाकी कर.

$\frac{३}{४} - \frac{५}{९} = \frac{२७}{३६} - \frac{२०}{३६} = \frac{७}{३६}$ .. हें उत्तर,

तिसरें, $\frac{७}{१२}$ आणि $\frac{५}{१२}$ यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, $\frac{१}{६}$

चवथें. $\frac{७}{१३}$ आणि $\frac{५}{३९}$ यांची वजाबाकी कर.

उत्तर, $\frac{५}{३९}$

पांचवें, $\frac{५}{१२}$ आणि $\frac{३}{१३}$ यांची वजाबाकी कर.

उत्तर. $\frac{२९}{१५६}$

साहावें, ५ $\frac{३}{८}$ आणि ४ $\frac{१}{६}$ चे $\frac{२}{७}$ यांची वजाबाकी कर.

उत्तर. ४ $\frac{३१}{१६८}$

सातवें, एक रुपयाचे $\frac{५}{६}$ आणि एक पावल्याचे $\frac{३}{८}$ चे $\frac{३}{५}$ यांची वजाबाकी कर.

पा. रे.

उत्तर. १ .. ७२ $\frac{३}{४}$

आठवें, रुपये, ५ $\frac{१}{६}$ चे $\frac{३}{७}$ आणि एक पावल्याचे $\frac{३}{८}$ यांची वजाबाकी कर.

रु. पा. रे.

उत्तर. १ .. १ .. ३० $\frac{२०}{४२}$

व्यवहारी अपूर्णांकाचा गुणाकार.

* भागानुबंध पूर्णांक असलातर त्यास विषम अपूर्णांकाचें रूप द्यावें;

* कोणतीही वस्तु अपूर्णांकानें गुणायाची, यांत हाच अर्थ आहे की, त्या वस्तूचे कांहीं भाग घ्यावयाचे आहेत. याजकरितां प्रभाग जाति अपूर्णांकासारिखें प्रसिद्ध होतें; आणि त्याप्रमाणें अंश आणि छेद परस्पर अनुक्रमें गुणून नवा इच्छिला अपूर्णांक उत्पन्न होतो.
पाहा. जेव्हां अपूर्णांकास पूर्णांकानें गुणायाचें आहे तेव्हां त्या अपूर्णांकाचे छेद त्या पूर्णांकानें निःशेष भागिले जातील तर भागून भागाकार तेथेंच लिहावा म्हणजे इच्छिलें काम झालें. आणि तसें न होईल तर अंश पूर्णांकानें गुणावे म्हणजे इच्छिलें काम झालें.

नंतर सर्व अंश परस्पर गुणावे, ते अंश होतील, तसे सर्व छेद परस्पर गुणावे, ते छेद होतील, म्हणजे इच्छिला गुणाकार होईल.

उदाहरणें.

प्रथम, $\frac{३}{४}$ आणि $\frac{२}{५}$ यांचा गुणाकार काय होतो.

आतां, $\frac{३}{४}+\frac{२}{५}=\frac{६}{२०}=\frac{३}{१०}$ हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{३}{५}$, २ $\frac{१}{६}$, ५ आणि $\frac{३}{८}$ चे $\frac{२}{३}$ हे सर्व परस्पर गुण.

आतां, $\frac{३}{५}+\frac{१३}{६}+\frac{५}{१}+\frac{३}{८}+\frac{२}{३} = \frac{१३+२}{८+२} = \frac{३१}{६} = ५\frac{१}{६}$ हें उत्तर.

तिसरें, $\frac{३}{७}$ आणि $\frac{५}{८}$ यांचा गुणाकार काय होतो.

उत्तर, $\frac{५}{२८}$

चवथें, $\frac{४}{१५}$ यांस $\frac{५}{२४}$ यांनीं गुण.

उत्तर. $\frac{१}{१८}$

पांचवें, $\frac{३}{७}$, $\frac{४}{९}$ आणि $\frac{३}{८}$ हे सर्व परस्पर गुण.

उत्तर, $\frac{६}{७}$

साहावें, $\frac{२}{३}$, $\frac{३}{२}$ आणि ३ हे सर्व परस्पर गुण.

उत्तर. १.

सातवें, $\frac{३}{४}$, $\frac{२}{५}$ आणि ४ $\frac{३}{१०}$ हे सर्व परस्पर गुण.

उत्तर. २ $\frac{३}{१०}$.

आठवें, $\frac{४}{७}$ आणि $\frac{५}{७}$ चे $\frac{२}{३}$ हे परस्पर गुण.

उत्तर. $\frac{१०}{२१}$

नववें, ८ आणि ५ चे $\frac{२}{३}$ हे परस्पर गुण.

उत्तर. २०.

दाहावें, $\frac{३}{८}$ चे $\frac{१}{२}$ आणि $\frac{३}{७}$ चे $\frac{७}{८}$ हे परस्पर गुण.

उत्तर. $\frac{२३}{८४}$.

अकरावें ३ $\frac{२}{७}$ आणि ४ $\frac{१४}{३३}$ हे परस्पर गुण.

उत्तर, १४ $\frac{१२९}{२३१}$

बारावें. ५ $\frac{२}{३}$, $\frac{३}{८}$ चे $\frac{२}{३}$ आणि ४ $\frac{३}{७}$ हे सर्व परस्पर गुण.

उत्तर. २ $\frac{३}{३१}$.

व्यवहारी अपूर्णांकाचा भागाकार.

---

* जसे गुणाकार करावयास अपूर्णांक तयार केले, तसेच भागाकार करावयास तयार करावे; नंतर अंश अंशानीं भागावे, तसे छेद छेदाने भागावे. जर दोनही निःशेष भागले जातील. असें न होईल तर भाजकाचे अंश व छेद बदलून लिहून गुणाकाराशीं प्रमाणें तीं पदें परस्पर गुणावीं, म्हणजे भागाकार झाला.

उदाहरणें.

प्रथम, $\frac{२५}{९}$ यांस $\frac{५}{३}$ यानें भाग.

आतां. $\frac{२५}{९} \div \frac{५}{३} = \frac{५}{३} = १\frac{२}{३}$ हें उत्तर.

दुसरें, $\frac{५}{२}$ यांस $\frac{३}{५}$ याने भाग.

$\frac{५}{२} \div \frac{३}{५} = \frac{५}{२} \times \frac{५}{३} = \frac{२५}{६} = ४\frac{१}{६}$ हें उत्तर.

तिसरें. $\frac{१६}{२५}$ यास $\frac{४}{५}$ याने भाग.

उत्तर, $\frac{४}{५}$.

चवथें. $\frac{७}{१६}$ यास $\frac{३}{४}$ याने भाग.

उत्तर, $\frac{७}{१२}$.

पांचवें, $\frac{१४}{९}$ यास $\frac{७}{६}$ याने भाग.

उत्तर, $१\frac{१}{३}$.

साहावें, $\frac{५}{६}$ यास $\frac{१५}{७}$ याने भाग.

उत्तर, $\frac{७}{१८}$

सातवें, $\frac{१२}{३५}$ यास $\frac{३}{५}$ याने भाग.

उत्तर, $\frac{४}{७}$

आठवें, $\frac{२}{३}$ यास $\frac{७}{५}$ याने भाग.

उत्तर, $\frac{१०}{२१}$

नववें. $\frac{३}{८}$ यास २ याने भाग

उत्तर, $\frac{३}{१६}$

दाहावें. $\frac{३}{५}$ यास २ याने भाग

उत्तर, $\frac{३}{१०}$

---

* भागाकार गुणाकाराचे उलटा आहे, याजकरितां या रीतीची सत्यता स्पष्ट आहे.

पाहा, जेव्हां अपूर्णांकास पूर्णांकाने भागायाचे आहे, तेव्हां त्या अपूर्णांकाचे अंश पूर्णांकानें निःशेष भागिले जातील तर भागून, भागाकार तेथें लिहावा. तसें न होईल तर छेद पूर्णांकाने गुणावे म्हणजे इच्छिलें झालें.

अकरावें. ७ $\frac{१}{३}$ यास ० $\frac{५}{८}$ यानें भाग.

उत्तर

बारावें, $\frac{१}{३}$ चे $\frac{३}{४}$ यास ७ $\frac{३}{८}$ चे $\frac{५}{६}$ यानें भाग.

उत्तर, $\frac{७}{१७१}$

व्यवहारी अपूर्णांकाचें त्रैराशिक.

पूर्वरीती प्रमाणें अपूर्णांक तयार करावे; नंतर त्यांत सम आणि व्यस्त काय असेल तें पाहून त्रिराशी रीती प्रमाणें इच्छाफळ उत्पन्न करावें.

उदाहरणें.

प्रथम, जर एक यार्ड बनातीचे $\frac{३}{८}$ यांस एक रुपयाचे $\frac{३}{५}$ पडतात; तर एक यार्ड बनातीचे $\frac{५}{१६}$ यांस काय पडेल ?

जर या. रु. या.

$\frac{३}{८}$: $\frac{३}{५}$ :: $\frac{५}{१६}$

रु. पा. रे.

$\frac{८}{३}$ + $\frac{५}{१६}$ + $\frac{३}{५}$ = $\frac{१}{२}$ = १ :: ३२ $\frac{१}{२}$ इच्छाफळ हें उत्तर.

दुसरें, जर रुपें तोळे ३ $\frac{३}{८}$ यास ४ रुपये २ पावले पडतात; तर १ तोळ्यास काय पडेल ?

रु. पा. रे.

उत्तर. १ .. १ .. ३३ $\frac{१}{३}$.

तिसरें, जर १ गलबताचे $\frac{३}{१६}$ यांची किंमत २७ ३१ रु. १ पावला होते, तर त्या गलबताचे $\frac{५}{३२}$ याची किंमत किती होईल ?

रु. पा. रे.

उत्तर, २२७६ .. ० .. १६ $\frac{२}{३}$.

चवथें. कलकत्यास १०० रुपयांची हुंडी घेणें तर, मुंबईस १०८ $\frac{३}{८}$ रुपये पडतात, तर कलकत्यास १२३०० रुपयांचे हुंडीस मुंबईस किती रुपये देणें पडतील.

रु. पा. रे.

उत्तर, १३३६८ .. ३ .. ५०

पांचवें. २१२७ रुपये २ पावले याचें एक वर्षाचें व्याज दरशेंकडा ३ $\frac{३}{८}$ रुपये प्रमाणें काय होईल ?

रु. पा. रे.

उत्तर, ८८ .. ३ .. ८७ $\frac{१}{२}$

साहावें. एक गलबताचा $\frac{३}{८}$ यास ७३० रुपये २ पावले २५ रेस पडतात. तर २५०० रुपयांस त्याच गलबताचा कोणता हिस्सा येईल ?

उत्तर, $\frac{५०००}{११६८९}$

सातवें. एक फूट अथवा १२ अंगुळें लांब आणि १२ अंगुळें रुंद असें फळें असावें. त्यास ७ $\frac{३}{४}$ अंगुळें रुंदीचा तखता लांब आहे. तेव्हां त्यांतून कितीलांब घेतल्यानें बरोबर होईल. ?

उत्तर. १८ $\frac{१८}{३१}$ अंगुळें.

आठवें. ८ $\frac{१}{२}$ यार्ड लांब आणि २ $\frac{१}{२}$ यार्ड रुंद कापडाची रजई करावयाची आहे, तीस एक भागास रेशमी अस्तर असावें, आणि तें रेशमी एकया डौंचें $\frac{२}{३}$ रुंदीचें आहे. तेव्हां कितीलांब घ्यावें म्हणजे रजईस बराबर होईल.

उत्तर. ३१ $\frac{७}{८}$ यार्ड.

नववें, कोणी एक जासूद रोज १३ $\frac{५}{६}$ तास चालत असतां, ३९ $\frac{१}{२}$ दिवसांत ज्या मुकामी गेला; त्याच मुक्कामीं जाणें आहे आणि रोज ११ $\frac{९}{१०}$ तास चालतो आहे, तर किती दिवस लागतील ?

उत्तर. ४५ $\frac{६५५}{७१४}$ दिवस.

दाहावें, एक पलटणांत ९७६ शिपाई आहेत. त्यांस नवीं डगलीं घावयाचीं. एक डगल्यास बनात ७ $\frac{१}{२}$ यार्ड लांब आणि १ $\frac{५}{६}$ यार्डांचे रुंदीचें लांब आहे, तेव्हां कितीयार्ड लांब घेतलें म्हणजे सर्व डगल्यांस पुरेल.

उत्तर. ४५३१ $\frac{३}{४}$ यार्ड.

दशांश अपूर्णांक.

दशांश अपूर्णांक तोच आहे. ज्याचा छेद (१०) हा अंक आहे: आणि त्याजवर इतकीं शून्यें आहेत कीं अंशस्थळींचे अंकास जितकीं स्थळें आहेत; आणि त्याचे लिहिण्याचा प्रकार असा आहे कीं. अंशस्थळींचा अंक लिहून त्याचे डावेकडे मात्र (.) असा बिंदु द्यावा. जसें $\frac{४}{१०}$ ह्मणजे या प्रमाणें लिहितात. .४. आणि $\frac{२४}{१००}$ या प्रमाणें लिहितात; .२४ आणि $\frac{७५}{१०००}$ या प्रमाणें; .०७५ आणि $\frac{१२४}{१००००००}$ याप्रमाणें .०००१२४ ! यांत इतकीं शून्यें घालितात कीं, अंकस्थळाचीं संख्या तीहींकरून छेदस्थळींचे शून्याचे संख्ये बराबर होईल.

मिश्र संख्या तीच आहे: जींत एक पूर्णांक संख्या आणि दुसरी अपूर्णांक संख्या योजिली आहे. त्यांना भेद मधील बिंदु करून स्पष्ट होतो. जसें. ३.०५ हा आणि ३ $\frac{५}{१००}$ अथवा $\frac{३०५}{१००}$ ही एकच आहे.

दशांशाचे उजवे बाजूस कितीही शून्यें ठेविलीं तरी त्यांचे भावांत-

न्यूनाधिक होत नाहीं; म्हणजे .४ अथवा .४० अथवा .४०० हे दशांश आहेत ज्यांचे भाव एकच आहेत. यांचे बरोबर ४/१० = २/५. परंतु जे कां दशांशाचे डावेकडे शून्यें ठेविलीं, तेव्हां त्यांचे भाव उत्तरोत्तर दशगुण न्यून होतात; जसें: .४ हा ४/१० म्हणजे चार दशमांश आहेत; परंतु .०४ हा ४/१०० म्हणजे चार शतांशाचे भाव बरोबर आहे; आणि .००४ हा ४/१००० म्हणजे चार सहस्रांशांचे बरोबर आहे.

जेव्हां दशांशांत कितीएक अंक लिहून पुढें संख्या स्तब्ध होते त्यांस सांत दशांश म्हणतात, जसें .१२५ १२५/१००० = १/८ आणि .९४८ = ९४८/१००० = २३७/२५०.

जेव्हां दशांशांत एक किंवा अनेक अंक त्यांचे तेच पुनः पुनः येतात तेव्हां त्यांस आवर्त दशांश ह्मणतात; जसें, .३३३३३३ इत्यादि = १/३, .६६६६६६ इत्यादि = २/३, .४२८५७१४२८५७१ इत्यादि तसेंच बहुत दुसरेही

जसें पूर्णांकांत तसेंच दशांश अपूर्णांकांत आहे कीं, उजवेकडील अंकाहून डावेकडील अंक उत्तरोत्तर दशगुण अधिक होतो आणि उजवेकडे तसाच न्यून होतो हें यापुढील कोष्टकावरून समजण्यांत येईल.

दशलक्ष.	लक्ष.	दशसहस्र.	सहस्र.	शत.	दश.	एक.	दशांश.	शतांश.	सहस्रांश.	दशसहस्रांश.	लक्षांश.	दशलक्षांश.
१	१	१	१	१	१	१	१	१	१	१	१	१

दशांश अपूर्णांकाची मिळवणी.

अपूर्णांकां प्रमाणें यांतील अंक त्या त्या भावानें अंकाखालीं अनुक्रमें लिहावे. असें केल्यानें ज्या दशांश चिन्हबिंदूनीं पूर्णांक आणि अपूर्णांक यांचा भेद दाखविला ते सर्व एकाखालीं एक असे एका ओळींत येतील. नंतर पूर्णांक रीतीनें उजवेकडून आरंभ करून एक एक ओळीची बेरीज घेऊन लिहावी; आणि ज्या रकमेंत दशांश स्थळें अधीक असतील तीं मोजून बेरिजेंत तितक्या स्थळांवर अथवा दशांश चिन्हाचे ओळीखालीं

दशांश चिन्ह करावें.

उदाहरणें.

प्रथम, २९·०१४६ आणि ३१४६·५ आणि २१०० आणि ·६२४१७ आणि १४·१६ यांची बेरीज घे.

```
   २९·०१४६
 ३१४६·५
 २१०९.
      ·६२४१७
   १४·१६
_______________
 ५२९९·२९८७७  ही बेरीज.
```

दुसरें, २७६, ३९·२१३, ७२०१४·९, ४१७ आणि ५०३२ यांची बेरीज घे.

उत्तर, ७७७७९ ११३.

तिसरें, ७५३०, १६·२०१, ३·०१४२, ९५७·१३, ६·७२११९ आणि ·३०१४ यांची बेरीज घे.

उत्तर, ८५१३·० ९६५३.

चवथें, ३१२·०९, ३·५७११, ७१९५·६, ७१·४९८, ९७३९·२१५, १७९ आणि ·००२७ यांची बेरीज घे.

उत्तर. १७५००·९७६८

दशांश अपूर्णांकांची वजाबाकी.

मिळवणी प्रमाणें, सर्व अंकांस आप आपले भावारवालीं लिहावे; नंतर पूर्णांक रीती प्रमाणें, उजवेकडून आरंभ कर, नंतर मिळवणींत सांगितल्या प्रमाणे दशांशचिन्ह बिंदू करावा.

उदाहरणें.

प्रथम. ९१·७३ आणि २·१३८ यांची वजाबाकी कर.

```
  ९१·७३
   २·१३८
_____________
  ८९· ५९२  बाकी हें उत्तर.
```

दुसरें, १· ९१८५ आणि २·७३ यांची वजाबाकी कर. उत्तर, ८·११

तिसरें, ४·९०१४२ आणि २१४·८१ यांची वजाबाकी कर. उत्तर, २०९·९

चवथें, २७१४ आणि ·९१६ यांची वजाबाकी कर. उत्तर, २७१३·०८

दशांश अपूर्णांकाचा गुणाकार.

∗ जसें अपूर्णांक असतात, तसें कर्त्यांस मांडून गुणाकार करावा;—नंतर दोहों कर्त्यांत जितकीं दशांश स्थळें आहेत तितकीं गुणाकारांत मोजून दशांश चिन्ह करावें. परंतु जर गुणाकारांत इतकीं अंकस्थळें नाहीं तर मागें शून्यें देऊन तितकीं स्थळें पूर्ण करून दशांश चिन्ह करावें.

उदाहरणें.

प्रथम. ·३२१०९६ यांस ·२४६५ यांनीं गूण.

```
     ·३२१०९६
       ·२४६५
   ----------
     १६०५४८०
    १९२६५७६
   १२८४३८४
   ६४२१९२
  -----------
  ·०७९१५०१६४०   गुणाकार हें उत्तर.
```

दुसरें. ७९·३८७ यांस २३·१५ यांनीं गूण. उत्तर, १८३६·८०३०५.

तिसरें. ·६३४७८ यांस ·४२०४ यांनीं गूण. उत्तर, ·२६६८६१५१२.

चवथें ·३८५७४६ यांस ·००४६४ यांनीं गूण.

उत्तर, ·००१७८९८६१४४.

प्रथमसंक्षेप.

दशांशास १ आणि त्यावर १, दोन, किंवा याहून अधिक शून्यें. जसें १०, १००, १००० इत्यादिकानें गुणायाचें.

हें काम करायास इतकें मात्र केलें पाहिजे, गुणकांत जितकीं शून्यें आहेत तितक्यां स्थळांवर गुण्यांत उजवेकडे दशांश चिन्ह सारावें, तितकीं स्थळें नाहींत तर शून्यें देऊन पूर्ण करावीं.

उदाहरणें.

प्रथम, ५१·२ आणि १००० यांचा गुणाकार हाच आहे, ५१२००.

दुसरें, २·७१४ आणि १०० यांचा गुणाकार काय आहे ?

तिसरें, ·९१६ आणि १००० यांचा गुणाकार काय आहे ?

∗ या पुढील उदाहरणापासून या रीतीची सत्यता स्पष्ट होईल — ·१२ हें ·३६१ यांनीं गुणायाचें असावें. या संख्या यांचे बरोबर आहेत $\frac{१२}{१००}$ आणि $\frac{३६१}{१०००}$ यांचा गुणाकार हाच आहे. $\frac{४३३२}{१०००००}$ म्हणजे पूर्वीं सांगितले दशांश अपूर्णांक लिहिण्याचे रीती प्रमाणें ·०४३३२ आहे: ज्यांत दशांश स्थळें छेदस्थळींचे शून्या इतकीं आहेत अथवा दोहों कर्त्यांत जितकीं दशांश स्थळें आहेत.

चवथें. २१·२१ आणि १०००० यांचा गुणाकार काय आहे

दुसरासंक्षेप.

संक्षेपानें गुणाकार कृति करायाचा. असाकीं. गुणाकारांत दशांशस्थळें इच्छिल्या प्रमाणेंच येतील.

गुणक संख्येंतील एकंचेस्थळींचा अंक गुण्यां कांचे त्या अंकाखालीं लिहावा; जो अंक गुणाकारांतील इच्छिले दशांशस्थळांचे शेवटलेस्थळीं आहे; आणि तेथून बाकी पूर्णांक उजवेकडे उलटे लिहावे, आणि अपूर्णांक त्या एकंपासून डावेकडे लिहावे. नंतर गुणायास आरंभ करावा, ज्या गुणकानें गुणायाचें त्याचे वरचे अंकापासून होईल असा; परंतु उजवे कडील शेवटा पासून लिहावें; मागील सोडिले अंकांतून एक जवळचा अंक गुणून त्यांतून हातचे घेण्याचा मार्ग ५ पासून १४ पर्यंत असल्यास हातचा एक धरावा; तसें १५ पासून २४ पर्यंत हातचे २, तसें २५ पासून ३४ पर्यंत असल्यास हातचे ३, याप्रमाणें पुढेंही. तो हातचा अंक त्यांत मिळवून लिहावें; नंतर पूर्वप्रमाणें मिळवणी करून तितकें इच्छिले स्थळांवर दशांश चिन्ह करावें, ह्मणजे गुणाकार झाला.

उदाहरणें.

प्रथम. २७·१४९९८६ यांस. ९२·४१०३५ यांनीं गूण, असें कीं. गुणाकारांत दशांशस्थळें चार होतील.

संक्षेपरीति.

२७१४९९८६
५३०१४२९
२४४३४८९७४
५४२९९७
१०८५९९
२७१५
८१
१४
२५०८·९३८०

चालतीरीति.

२	७·१४९९८६
९	२·४१०३५
११	५७४०३०
८१	४४९०५८
२७१४	९८६०
१०८५९९	४४
५४२९९७	२
२४४३४८९७४	
२५०८९३८०	५५०५१०

दुसरें, ४८०·१४९३६ यांस २·७२४१६ यांनीं गूण, असें कीं, गुणाकारांत दशांशस्थळें चार होतील.

गुणाकार, १३०८·००३६.

तिसरें, २४९०·३०४८ यांस ·५७३२०६ यांनीं गूण, असें कीं, गुणाकारांत दशांशस्थळें पांच होतील.

गुणाकार. १४२७·६५६०७.

चवथें, ३२५·७०१४२८ यांस ·७२१८३९३ यानीं गूण, असे कीं, गुणाकारांत दशांशस्थळें तीन होतील.

गुणाकार, २३५·१०४.

दशांशअपूर्णांकाचा भागाकार.

पूर्णांका प्रमाणें, भागाकार करावा; आणि भागाकारांत इतकीं दशांशस्थळें करावीं कीं, जितकीं, दशांशस्थळें भाजका पेक्षां भाज्यांत अधीक आहेत. ⁂

दशांशचिन्ह बिंदुस्थळ जाणायाची दुसरी हीरीती आहे; भागाकारांतील प्रथम अंक, पूर्णांक अथवा दशांश असेल तो अशास्थळीं असावा कीं, भाजक आणि भागाकार यांचे प्रथम गुणाकारांतील भाजकांचे एकंचे स्थळींचा गुणला अंक जशा स्थळीचे भाज्यांका खालीं बसेल. तशास्थळीं.

जेव्हां रीती प्रमाणें दशांशचिन्ह बिंदुस्थळ करायाचें आणि भागाकारांत. तेवढीं स्थळें नाहींत तर शून्यानीं तेवढीं स्थळें करून बिंदु करावा.

जेव्हां भागाकार केल्यानंतर कांहीं शेष राहील अथवा जेव्हां दशांशस्थळें भाज्या पेक्षां भाजकांत अधिक आहेत; तेव्हां भाज्यावर तितकीं शून्यें घालावीं कीं, काम इच्छे प्रमाणें होईल.

उदाहरणें.

प्रथम,	दुसरें,
१७८) ४८५२०९९८(००२७२५८९	·२८३९) २७·०००००(९०२·३११४
१२९२	६१००
४६०	८२२०
१०४९	३०३०
१५९९	३९१०
१७५८	१२७१४
१५६	२१५४

तिसरें, १२२·७०५३६ यांस ५४·२५ यानीं भाग. उत्तर, २·२६०२

चवथें, १२ यांस ·७८५४ यानीं भाग. उत्तर, १५·२७८.

पांचवें, ४११५·६८ यांस १०० यानीं भाग. उत्तर, ४१·१५६८.

⁂ यारीतीचें कारण स्पष्ट आहे; कांकीं, भाजक आणि भागाकार हे गुणून भाज्य उत्पन्न होतो. आणि गुणाकारा प्रमाणे भाज्यांत दशांशस्थळें भाजक आणि भागाकार यादोहोंतील दशांशस्थळांचे बरोबर असलीं पाहिजेत याजकारितां भागाकारांत तितकीं दशांश स्थळें असलीं पाहिजेत. जितकीं भाजका पेक्षां भाज्यांत अधिक आहेत.

साहावें, ·८२०७५०२ यांस. १५३ यानीं भाग. उत्तर, ५·४२३३

प्रथमसंक्षेप.

जेव्हां भाजक पूर्णांक आहे, आणि त्यावर कांहीं शून्यें असतील; तेव्हां त्या शून्यास काढून टाकावें, आणि दशांश चिन्ह भाज्यांत इतके स्थळांवर मागें डावेकडे सारावें, कीं, जितकीं शून्यें कापून टाकिलीं आहेत. जर भाज्यांत तितकीं स्थळें नाहींत तर डावेकडे शून्यें घालून, पूर्ण करून, सारावें नंतर वर सांगितले रीतीनें भागाकार करावा.

उदाहरणें.

प्रथम, ४५·५ यांस २१०० यानीं भाग.

२१)·४५५(·०२१६ इत्यादि.
३५
१४०
१४

दुसरें, ४१०२० यांस ३२००० यानीं भाग. उत्तर, १·२८१८७५.

तिसरें, ९५३ यांस २१६०० यानीं भाग.

उत्तर, ·०४४१२०३७०३७ इत्यादि.

चवथें, ६१ यांस ७९००० यानीं भाग.

उत्तर, ·०००७७२१५१९ इत्यादि.

दुसरासंक्षेप.

वरचे संक्षेपापासून हें सिद्ध होतें कीं, जर भाजक १ हा अंक असेल, आणि त्याजवर कांहीं शून्यें असतील, जसें, १०, १००, १०००, इत्यादि, तर भागाकार काढण्या साठीं भाज्यांतील दशांश चिन्ह इतकें मात्र मागें सारिलें पाहिजे कीं, जितकीं भाजकांत शून्यें आहेत; जर इतकीं अंकस्थळें नसतील तर मागें शून्यें घालून स्थळें पूर्ण करून सारावें.

उदाहरणें.

जसें, २१७·३÷१००=२·१७३

आणि, ५·१६÷१००=·०५१६

आणि, ४१९÷१०=४१·९

आणि, ·२१÷१०००=·

तिसरासंक्षेप.

जेव्हां भाजकांत अंक बहुत आहेत; अथवा भागाकारांत दशांश

स्थळें इच्छेप्रमाणेंच यावीं असें आहे; तेव्हां भागाकारांत पूर्णांक स्थळें किती येतील तो सुमार करून तीं व इच्छिलेलीं दशांश स्थळें मिळून कितीस्थळें होतात तितकीं भाजक स्थळें ठेवून बाकी कापून टाकावीं. नंतर तो भाजक भाज्याचे प्रथम अंकांत किती वेळ जाईल तें पूर्वप्रमाणें पाहावें.

नंतर अनुक्रमें प्रत्येक वजाबाकी नवे भाज्य असावे; आणि असा प्रत्येक भाज्य घेतल्यावर भाजक स्थळींचा एक एक उजवेकडील अंक सोडावा, परंतु स्मरण ठेवावें कीं, असा एकेक अंक सोडिल्यावर हातचा अंक गुणाकाराचे दुसरे संक्षेपांत सांगितल्या प्रमाणें घेतला पाहिजे; पाहा जेव्हां भाजकांत इतके अंक नाहींत, जितके भागाकारांत इच्छिले आहेत, तेव्हां सर्व अंकानीं भागाकार तुल्य आरंभ करावें, आणि सरळ रीतीनें भागाकार चालवावा, जों पर्यंत भाजकस्थळीं इतके अंक मात्र राहातील, जितके भागाकारांत बाकी काढणें राहिले; नंतर आरंभ करावा.

उदाहरणें.

प्रथम, २५०८·९२८०६ यांस १२·४१०३५ यानीं भाग, असें कीं, भागाकारांत दशांश स्थळें चार होतील. यावरून या उदाहरणीं भागाकारांत अंकस्थळें साहा होतील.

संक्षेपरीति.

```
१२·४१०३५)२५०८·९२८०६(२७·१४९८
          ६६०७११
           १३८४९
            ४६०८
             ९१२
              ८०
               ६
```

चालतीरीति.

```
१२·४१०३५)२५०८·९२८०६(२७·१४९८
          ६६०७२१०६
           १३८४८६१०
            ४६०७५७५०
             ९१११६१००
              ७९४६७८५०
               ५५३६५·७०
```

दुसरें, ४१०९·२२५१ यांस २२०·४०९ यांनीं भाग, असें कीं भागाकारांत दशांश स्थळें चार होतील. उत्तर, १७·८३४५.

तिसरें, ३७·१०४३८ यांस ५७१२·९६ यांनीं भाग, असे कीं, भागाकारांत दशांशस्थळें पांच होतील.

उत्तर, ·००६४९.

चवथें, ९१२·०८ यांस २१३७·२ यांनीं भाग. असें कीं, भागाकारांत दशांशस्थळें तीन होतील.

उत्तर, ·४२७.

दशांशरूपभेद
प्रथमप्रकार.

व्यवहारी अपूर्णांकांस बरोबर भावाचें दशांशरूप द्यावयाचा.

दशांश भागाकार रीती प्रमाणें अंश छेदानीं भागावे अंशावर हावीं तेवढीं शून्यें द्यावीं; भागाकार येईल ते इच्छिले दशांश झाले.*

---

* ज्यांचे छेद अविभाज्य संख्या आहे अशे व्यवहारी अपूर्णांकांस दशांशरूप द्यावयास इच्छिलें आहे. असें कीं, ज्याचे अंक बहुत होतील, त्याची रीति ही आहे.

उदाहरणें.

$\frac{१}{२९}$ हा व्यवहारी अपूर्णांक असावा, ज्यास बरोबर भावाचें दशांशरूप देणें आहे. ते व्हां चालते रीतीनें शेष एकच अंक राही पर्यंत भागाकार करून त्याचें हें रूप होईल $\frac{१}{२९}$ = ·०३४४८ $\frac{८}{२९}$ हा संपूर्ण भागाकार आहे, नंतर या समीकरणाच्या दोन्ही बाजू ८ या शेषाचे अंशानीं गुणून यास हें रूप होईल. $\frac{८}{२९}$ = २७५८४ $\frac{२८}{२९}$ अथवा $\frac{८}{२९}$ = २७५८६ $\frac{६}{२९}$; जर ही किंमत प्रथम समीकरणांत व्यवहारी अपूर्णांकाचे स्थळीं लिहिली तर त्यास हें रूप होईल. $\frac{१}{२९}$ = ·०३४४८२७५८६ $\frac{६}{२९}$, पुनः या समीकरणाच्या दोन्ही बाजू ६ या शेषाचे अंशानीं गुणिल्यातर यांस हें रूप होईल.

$\frac{६}{२९}$ = २०६८९६५५१७ $\frac{७}{२९}$; तर पूर्व प्रमाणें ही किंमत त्या समीकरणाचे व्यवहारी अपूर्णांकस्थळीं लिहिली तर त्यास हें रूप होईल, $\frac{१}{२९}$ = ·०३४४८२७५८६२०६८९६५५१७ $\frac{७}{२९}$; या प्रमाणें पुढेंही इच्छा असेल तेथ पर्यंत करावें; म्हणजे या पासून कळतें कीं, प्रति आवृत्तीस दशांशस्थळें हुप्पट वाहाडतात या उदाहरणांत दशांश अठ्ठावीस अंकस्थळांनीं पुनरावृत्त होतात, म्हणजे सांगितलें अपूर्णांकाचे छेदस्थळाचे एकोन संख्या इतक्यास्थळांनीं. यांस बरोबर दोन अवयवानीं भागितां येईल, पुढें सांगतों या प्रमाणें.

·०३४४८२७५८६२०६८
·९६५५१७२४१३७९३१

यांत पाहून कळेल कीं. या दोन ओळींतील अनुक्रमें एक एक अंक अशा दोन अंकांची बेरीज ९ या अंका बरोबर आहे; जसें, ०+९ = ९; ३+६ = ९; असें पुढें ही या अठ्ठावीस अंकस्थळांचे आवृत्तींत $\frac{२}{२९}$, $\frac{३}{२९}$ आणि $\frac{४}{२९}$ इत्यादि, सर्वांचे वेगळाले भाव निघतात. परंतु त्याचा कोण कोणते अंकापासून आरंभ होतो हें अन्वांत कळेल, जसें. $\frac{२}{२९}$ = ·०६८९६ इत्यादि. म्हणजे या मूळ आवृत्तीचें बारावे

प्रथम, $\frac{७}{२४}$ यांस दशांशरूपदे.

२४ = ४ × ६ तेव्हां ४) ७

६) १७५००००

·२९१६६६ इत्यादि.

दुसरें. $\frac{१}{४}$ आणि $\frac{१}{२}$ आणि $\frac{३}{४}$ यांस वेगळाले दशांश रूपदे.

उत्तर. ·२५ आणि ·५ आणि ·७५.

तिसरें, $\frac{५}{८}$ यांस दशांश रूपदे. उत्तर, ·६२५.

चवथें, $\frac{३}{२५}$ यांस दशांशरूपदे. उत्तर, ·१२.

पांचवें, $\frac{१}{३२}$ यांस दशांश रूपदे. उत्तर, ·०३१२५

साहावें. [illegible] यांस दशांश रूपदे. उत्तर. ·१४२१५४, इत्यादि.

दुसरा प्रकार
कोणतेही दशांशाचा भाव त्याचे खालचे हलके नावांत काढायाचा.
रीति.

सांगितले दशांश ज्या भारी नांवाचे अंकाचे असतील त्याचे खालचे हलके नांवाचे त्या भारी नांवाचे एकांत किती आहेत तितक्यांनीं ते दशांश गुणून गुणाकारांत दशांश चिन्ह द्यावें,

नंतर जे दशांश राहिले त्यांस त्याचे खालचे हलके नांवाचे. या भारी नांवाचे एकांत किती आहेत तितक्यांनीं ते दशांश गुणून गुणाकारांत दशांश चिन्ह द्यावें. याप्रमाणें शेवट पर्यंत करावें.

शेवटीं हे सर्व डावेकडील पूर्णांक त्या पहिले भारी नांवाचे अंका

अंकस्थळांपासून आरंभ होतो $\frac{३}{२९}$ = ·१०३४४८ इत्यादि, म्हणजे इचे अठ्ठाविसावें अंकस्थळांपासून आरंभ होतो, म्हणून यामूळ अठ्ठावीस अंकस्थळांचे आवृत्तीचे पोटांत दुसऱ्या अठ्ठावीस आवृत्ति अंकस्थळांच्या अठ्ठावीस आवृत्ती होतात.

ज्यांचे छेद अविभाज्य संख्या आहे असे व्यवहारी अपूर्णांकांत या सारिखेच कांही चमत्कारीक गुण आहेत ते समजांत यावया करितां बाजूवर दुसरें उदाहरण दाखवितों, ज्यांचे छेदस्थळीं ७ ही अविभाज्य संख्या आहे, परंतु यांचे आरंभ वेगळाले संख्या पासून झाले आहेत, तथापि साहा साहा अंकस्थळांच्या साहा आवृत्ति साहा अंकस्थळांचे मूळ आवृत्तींत आहेत.

$\frac{१}{७}$ = ·१४२८५७१४, इत्यादि.
$\frac{२}{७}$ = २८५७१४२८
$\frac{३}{७}$ = ४२८५७१४२
$\frac{४}{७}$ = ५७१४२८५७
$\frac{५}{७}$ = ७१४२८५७१
$\frac{६}{७}$ = ८५७१४२८५

हून उतरते आहेत ते जुळून लिहावे ह्मणजे बरोबर किंमत झाली.

टीप. ही रीति पूर्णांकांचे उतरती भांजणी सारखी आहे.

उदाहरणें.

प्रथम, .७७५. रुपयांचे यांची किंमत काय आहे.

रु. .७७५
४
पा. ३.१००
१००
रे. १० .०००   उत्तर, पा. ३. रे. १०

दुसरें, .६२५ शिलिंगाचे यांचा भाव काय आहे.

उत्तर, ७ १/२ पेन्स.

तिसरें. .८६३५ पौंडाचे यांचा भाव काय आहे.

उत्तर, शि. १७. ३. २४ पेन्स.

चवथें. .०१२५ मणाचें यांचा भाव काय आहे.

उत्तर. २. ४ पावशेर.

पांचवें. .६९४ पौंड आयचे यांचा भाव काय आहे.

उत्तर ओं. पे. ग्रे. ८..१२..१५ .१४४.

साहावें. .६२५ खंडीचे यांचा भाव काय आहे

उत्तर, म. पा. १२...६.

सातवें, .००९९४३ मैलाचे यांचा भाव काय आहे.

उत्तर, याडे. फू. इं. १७..१..५ .९८८४८.

आठवें, .६८७५ याडेवस्त्राचे यांचा भाव काय आहे.

उत्तर, गा. ने. २. ३.

नववें. .३३७५ बिघ्यांचे यांचा भाव काय आहे.

उत्तर. पां. का. ६..१५.

दाहावें. .२५८३ हागझेडचे यांचा भाव काय आहे.

उत्तर, १३.१२३९. ग्यालन.

तिसरा प्रकार.

हलके नांवाचे पूर्णांक अथवा दशांश यांस बरोबर भावाचें, भारी नांवाचे दशांशाचें रूप द्यावयाचा.

रीति.

जो अंक सांगितला आहे तो त्याचे वरचे भारी नांवाचे अंकांत तेकि ती आहेत तितक्यानीं भागावा. भागाकार येईल तो दशांश रूप होईल. या प्रमाणें इच्छिले भारी नांवां पर्यंत करावें.

उदाहरणें.

प्रथम. १ शेर वजनी यांस खंडीचे दशांशाचें रूपदे.

४०	१ शेर
	·०२५ मणाचे
२०	·००१२५ खंडीचे हें उत्तर,

दुसरें, ९ रेसांस रुपयाचे दशांशांचें रूपदे.

तिसरें, केली २ अधोलीस खंडीचे दशांशांचें रूपदे.

चवथें, २६ रेसांचे यांस रुपयाचे दशांशाचें रूपदे.

पांचवें, २·१५ पौंड यांस हंड्रेड वेटाचे दशांशांचें रूपदे.

उत्तर, ·०१९१९६. इत्यादि, हंड्रेड्वेट.

साहावें, २० यार्ड यांस मैलाचे दशांशांचें रूपदे.

उत्तर, ·०११३६३६. इत्यादि, मैल.

सातवें, १ काठी ईस बिघ्याचे दशांशांचें रूपदे.

आठवें, २ फरे मीठ यांस राशीचे दशांशांचें रूपदे.

नववें, १४ मिनुटें यांस दिवसाचे दशांशांचें रूपदे.

उत्तर, ·००९७२२ इत्यादि, दिवस.

दाहावें, २१ केली शेराचे यांस खंडीचे दशांशांचें रूपदे.

अकरावें, २० सेकंद यांस मिनुटाचें दशांशांचें रूपदे.

पाहा, जे व्हां हलके नांवाचे अंकाच्या अनेक रकमा आहेत त्यांस भारी नांवाचे दशांशांचें रूपदेणें तेव्हां.

भाज्यां करितां सांगितल्या रकमा एक एकाखालीं लिहाव्या, अशा कीं, त्यांतील हलके नांवाची रकम वर येऊन अनुक्रमें उत्तरोत्तर भारी नांवाच्या खालीं येतील.

प्रत्येक भाज्याचे डावेकडे भाजकाकरितां ते अंक लिहावे कीं, ज्या अंकानीं त्या रकमा भारी नावांत आणितां येतील; आणि; भाज्य भाजक यांची भिन्नता दाखवाया साठीं मध्यें रेघ उभी करावी.

वरचे ओळीपासून आरंभ करून अनुक्रमें सर्व भागाकार करावा,

आणि जो भागाकार येईल तो प्रत्येक त्याचे त्याचे खालचे ओळींतील भाज्याचे उजवेकडे दशांश चिन्हकरून पुढें मांडावा; असें करितां करितां जो शेवटील भागाकार येईलतें इच्छिलें दशांशरूप होईल.

उदाहरणें.

प्रथम, ३पावले ४०रेंस यांस रुपयाचे दशांशांचें रूपदे.

१०० ४०

४ ३·४

·८५ रुपयाचे हें उत्तर.

दुसरें, १०रुपये ३पावले पन्नास रेस यांसरुपयाचे दशांशाचें रूपदे.

तिसरें, ३पावले ८रेंस यांस रुपयाचे दशांशाचें रूपदे.

चवथें, १ पावला ५रेंस यांस रुपयाचे दशांशाचें रूपदे.

पांचवें, ५ मण ३० शेर वजनी यांसखंडीचे दशांशाचें रूपदे.

दशांशांचें त्रैराशिक.

सर्व पदें या रीतीनें तयार करावीं, ह्मणजे व्यवहारी अपूर्णांकास दशांश रूप द्यावें, अनेककमांचे पदांस भारी नांवाचे दशांशाचें रूप द्यावें अथवा हलके नांवाचे पूर्णांकाचें रूप द्यावें, आणि आद्यंत पदें समजाती असावीं. नंतर पूर्णांकांत सांगितल्याप्रमाणें त्रैराशिक करावें.

पाहा. पूर्णांकांत आणि व्यवहारी अपूर्णांकांत जीं वेगळालीं त्रैराशिक आणि पंचराशिकादिक यांचीं उदाहरणें सांगितलीं आहेत तीं इच्छेप्रमाणें या दशांश त्रैराशिकानें होतील, आतां याची रीति दाखवायासाठीं व्यवहारी अपूर्णांक त्रैराशिकांतील प्रथमोदाहरण एथें घेतों.

जर एक याड बनाथीचे $\frac{३}{८}$ यांस एक रुपयाचे $\frac{२}{५}$ पडतात, तर एक याड बनाथीचे $\frac{५}{१६}$ यांस काय पडेल ?

$\frac{३}{८}$ = ·३७५. याडे ·३७५ : रु. ·४ : : याडे ·३१२५

·४

·३७५)·१२५००(·३३३३३३ इत्यादि.

$\frac{२}{५}$ = ·४ १२५० ४

·१·३३३३३२

$\frac{५}{१६}$ = ·३१२५ १००

३३·३३ ३२००

उत्तर, पा. रे. १··३३·३३ ३२ इत्यादि.

द्वादशांश.

द्वादशांश ह्मणून एकरीति आहे, जीणेकरून शिल्पिलोक आपापले कामाचीं क्षेत्र फळें जाणतात फूट, इंच आणि पावइंच हींचमानें प्रायशः कामांत घेतात याहून सूक्ष्म आहेत तीं घेतनाहींत. याकामाची रीति पुढें सांगतों.

जीं मापें परस्पर गुणायाचीं आहेत तीं एकाखालीं एकलिहावीं, अशीं कीं, फुटी खालीं फूट, इंचा खालीं इंच. आणि पावइंचाखालीं पावइंच येईल.

गुण्यांतील हलके नामाचे पदापासून आरंभकरून त्याचें प्रत्येक पद गुणकाचे फुटस्थळींचे अंकानें गुणावें, आणि प्रत्येक पदाचा गुणाकार त्याचेत्याचे खाळीं लिहावा. परंतु इंचस्थळींचा गुणाकार बारा पेक्षां अधिक आल्यास बारांनी भागून बाकी तेथें लिहावी, आणि भागाकार हानचा अंक तो फुटस्थळींचा गुण्य गुणून त्यांतमिळवून लिहावा.

अशारीतिनें, गुण्याचीं वेगळालीं पदें गुणांकाचे इंचस्थळींचे अंकाने आणि त्यावरील भागानें ही गुणून गुणाकार बारां पेक्षां अधिक आल्यास पूर्वप्रमाणें करून उजवेकडेस एकस्थळ सारून गुणाकार मांडावा.

नंतर विविध मिळवणी प्रमाणें त्या दोन ओळींची बेरीज घ्यावी.

उदाहरणें.

प्रथम, ४ फूट ७ इंच हे गुण्यांक ६ फूट ४ इंच या गुणकांकानें गुणून गुणाकार काय आलातो सांग.

फु.	इं.
४	७
६	४
२७	६
१	६ १/३
२९	० १/३ हें उत्तर,

दुसरें, १४ फूट ९ इंच हें गुण्यांक ४ फुट ६ इंच यागुणकांकानें गुणून गुणाकार काय आला तो सांग.

फु.	इं.
१४	९
४	६
५९	०
७	४ १/२
६६	४ १/२ हें उत्तर,

तिसरें, ४ फुट ७ इंच हे गुण्यांक ९ फूट ६ इंच या गुणकांकानें गुणून गुणाकार काय आला तो सांग.

उत्तर, फु. ४३ .. इं. ६ १/२

चवथें, १२ फूट ५ इंच हे गुण्यांक ६ फुट ८ इंच या गुणकांकानें गुणून गुणाकार काय तो सांग.

उत्तर, फु. ८२ ... इं. ९ १/३

पांचवें, ३५ फूट ४ १/२ इंच हे गुण्यांक १२ फुट ३ इंच या गुणकांकानें गुणून गुणाकार काय तो सांग.

उत्तर, फु. ४३३ .. इं. ४ १/८

साहावें, ६४ फूट ६ इंच हे गुण्यांक ८ फूट ९ १/२ इंच या गुणकांकानें गुणून गुणाकार काय तो सांग.

उत्तर, फु. ५६५ इं. ८ ३/४

पाहा. वरचे गुणाकारांत इंचस्थळीं ज्या संख्या आहेत. त्या तितके चौरस इंच दाखवीत नाहीं, परंतु काटकोन चौकोन दाखवितात, ज्याची रुंदी १ इंच, आणि लांबी बारा इंच. जसें प्रथम उदाहरणाचें उत्तर २९ चौरस फूट. आणि ४ चौरस इंच आहे. आणि दुसरे उदाहरणाचें उत्तर ६६ चौरस फूट आणि ५४ चौरस इंच आहे.

घातकर्म.

घात म्हणजे कोणी एक संख्या मूळ कल्पून तिणें तीच पुनःपुनः विवक्षीत वेळा गुणून जो अवयवी उत्पन्न होतो तो आहे. हा घात उत्पन्न करण्याचे रीतीस घातकर्म म्हणतात. जसें,

२ = २ हें मूळ, अथवा २ याचा प्रथम घात आहे.

२+२ = ४ हा दोन याचा द्विघात, अथवा वर्ग आहे.

२+२+२ = ८ हा दोन याचा त्रिघात, अथवा घन आहे.

२+२+२+२ = १६ हा दोन याचा चतुर्घात आहे.

आणि या रीतीनें करून पुढील कोष्टकांत प्रथम नव संख्यांचे प्रथम नव घात सांगतों.

घातकोष्टक.

प्रथम नव संख्यांचे.

प्र·	वर्ग	घन	चतुर्थ·	पंचमघा	षड्घात	सप्तमघात	अष्टघात	नवघात
१	१	१	१	१	१	१	१	१
२	४	८	१६	३२	६४	१२८	२५६	५१२
३	९	२७	८१	२४३	७२९	२१८७	६५६१	१९६८३
४	१६	६४	२५६	१०२४	४०९६	१६३८४	६५५३६	२६२१४४
५	२५	१२५	६२५	३१२५	१५६२५	७८१२५	३९०६२५	१९५३१२५
६	३६	२१६	१२९६	७७७६	४६६५६	२७९९३६	१६७९६१६	१००७७६९६
७	४९	३४३	२४०१	१६८०७	११७६४९	८२३५४३	५७६४८०१	४०३५३६०७
८	६४	५१२	४०९६	३२७६८	२६२१४४	२०९७१५२	१६७७७२१६	१३४२१७७२८
९	८१	७२९	६५६१	५९०४९	५३१४४१	४७८२९६९	४३०४६७२१	३८७४२०४८९

घातप्रकाशक ती संख्या आहे, जी त्या घाताचें स्वरूप दाखविते, आणि घात उत्पन्न करण्यास जितके वेळ गुणाकार करावे लागतात त्यावेळां पेक्षां एकानें अधीक असते. जसें. १ हा मूळाचा प्रकाशक आहे. २ हा द्विघात अथवा वर्ग याचा प्रकाशक आहे. ३ हा त्रिघात अथवा घन याचा प्रकाशक आहे. ४ हा चतुर्घाताचा प्रकाशक आहे. असेंपुढेंही

जेव्हां घात उत्पन्न करायाचे आहेत. तेव्हां अशी रीति आहे कीं, मूळसंख्येचेवर उजवेआंगास त्यांचे प्रकाशक बारीक लिहावे.

जसें. $२^{२} = ४$ हा २ याचा द्विघात अथवा वर्ग दाखवितो.

$२^{३} = ८$ हा २ याचा त्रिघात अथवा घन दाखवितो.

$२^{४} = १६$ हा २ याचा चतुर्घात दाखवितो.

$५४०^{४} = ८५०३०५६००००$. हा ५४० याचा चतुर्घात दाखवि-

जेव्हां दोन किंवा अधिक घात परस्पर गुणिले आहेत तेव्हां त्यांचा गुणाकार तो घात आहे. ज्याचा प्रकाशक दोन कर्त्यांचे घातप्रकाशकांचे बेरिजे बरोबर आहे. अथवा घातांचा गुणाकार आणि त्या वेगळाले कर्त्यांचे प्रकाशकांची बेरीज एकच आहे. जसें पुढील दोन याचे सांगितले घातांपासून कळे

	प्र.	द्वि.	तृ.	च.	पं.	ष.	स.	अ.	न.	द.
	२	४	८	१६	३२	६४	१२८	२५६	५१२	१०२४
अथवा,	$२^{१}$	$२^{२}$	$२^{३}$	$२^{४}$	$२^{५}$	$२^{६}$	$२^{७}$	$२^{८}$	$२^{९}$	$२^{१०}$

यांत ४+४=१६ आणि २+२=४ हा त्याचा प्रकाशक आहे.

आणि ८+१६=१२८ आणि ३+४=७ हा त्याचा प्रकाशक आहे.

आणि १६+६४=१०२४ आणि ४+६=१० हा त्याचा प्रकाशक आहे.

पुनः $\frac{२}{३}+\frac{२}{३}=\frac{४}{९}$ हा $\frac{२}{३}$ चा वर्ग आहे; $\frac{४}{९}+\frac{२}{३}=\frac{८}{२७}$ हा $\frac{२}{३}$ चा घन आहे; आणि $\frac{८}{२७}+\frac{२}{३}=\frac{१६}{८१}$ हा $\frac{२}{३}$ चा चतुर्घात आहे, असेंच पुढेंही. यापासून कळतें कीं, पूर्णांकांचे घात उत्तरोत्तर अधिक भावाचे होतात; आणि व्यवहारी सम अपूर्णांकांचे घात उत्तरोत्तर न्यून भावाचे होतात.

दुसरीं उदाहरणें.

पहिलें, ४५ यांचा द्विघात अथवा वर्ग काय होतो तो सांग.

उत्तर, २०२५.

दुसरें, ४·१६ यांचा वर्ग काय होतो तो सांग.

उत्तर, १७·३०५६.

तिसरें, ३·५ यांचा त्रिघात किंवा घन काय होतो तो सांग.

उत्तर, ४२·८७५.

चवथें, ·०२१. यांचा पंचघात काय होतो तो सांग.

उत्तर, ·०००००००२०५१११४०.

पांचवें, $\frac{२}{३}$ यांचा वर्ग काय होतो तो सांग.

उत्तर, $\frac{४}{९}$.

साहावें, $\frac{५}{९}$ यांचा त्रिघात काय होतो तो सांग.

उत्तर. $\frac{१२५}{७२९}$

सातवें, $\frac{३}{४}$ यांचा चतुर्घात काय होतो तो सांग.

उत्तर, $\frac{८१}{२५६}$

मूळकर्म.

मूळकर्म म्हणजे कोणतेही सांगितले घाताचें मूळ काढायाची रीति, ते घातकर्माचें उलटें आहे.

कोणतीही संख्या अथवा घात याचें मूळ, तीच संख्या आहे, जी तीणें तीच कितीवेळ गुणून तोच घात उत्पन्न करिते. जसें, २ हे ४ यांचें वर्गमूळ आहे, कांकीं, $२^{२} = २ + २ = ४$; आणि ३ हें २७ यांचें घनमूळ आहे, कांकीं $३^{३} = ३ + ३ + ३ = २७$.

कोणतीही संख्या अथवा मूळ विवक्षित वेळा त्याणें तेंच गुणून त्याचा घात पूर्ण करितां येतो. परंतु बहुतही संख्या अशा आहेत कीं, ज्यांचें मूळ कधींही पूर्ण निघत नाहीं. तथापि दशांशांचे सहाय्यानें मूळाचे जवळ जवळ जाववतें.

जें मूळ पूर्ण निघत नाहीं त्यास खंडमूळ अथवा करणी म्हणतात; आणि जीं मुळें बरोबर काढवतात त्यांस अखंडमूळें म्हणतात; जसें, ३ याचें वर्गमूळ करणी आहे; परंतु ४ याचें वर्गमूळ अखंड आहे, कांकिं, पूर्ण २ आहेत; पुनः ८ यांचें घनमूळ अखंड आहे, कांकीं, पूर्ण २ आहेत; परंतु ९ याचें घनमूळ करणी अथवा खंड आहे.

मूळ दाखवावयाकरितां घाताचे मागें कधिं $\sqrt{}$ असें चिन्ह करितात, आणि त्या चिन्हांत मूळप्रकाशक लिहितात. जसें, २० याचें घनमूळ $\sqrt[३]{२०}$ असें लिहितात; आणि त्याचें वर्गमूळ $\sqrt{२०}$ असें लिहितात. असें वर्गमूळ दाखवायासाठीं त्याचा प्रकाशक २ हा कधींही त्यांत लिहीत नाहींत केवळ चिन्हानेंच दाखवितात.

जेव्हां घातांत अनेक पदें + धन − ऋण चिन्हानीं जोडिलेलीं आहेत तेव्हां त्याचे डावेकडील मूळ प्रकाशक चिन्हाचे शिरापासून त्यांजवर— अशी सरळ रेघ करितात. जसें, ४५−१२ याचें घनमूळ $\sqrt[३]{४५-१२}$ असें लिहितात. अथवा त्या संख्यांस कोंसांचे सारखळेंत बांधून या रीतीनें लिहितात, जसें, $\sqrt[३]{(४५-१२)}$.

परंतु आतां प्रायशः सर्व मूळांचे प्रकाशक, व्यवहारी अपूर्णांकाचे रूपानें घात प्रकाशकां सारिखे लिहितात; जसें, ८ याचें वर्गमूळ $८^{१/२}$ असें, २५ याचें घनमूळ $२५^{१/३}$ असें, आणि ४५−१८ याचें चतुर्घात मूळ $(४५-१८)^{१/४}$ असें, अथवा $४५-१८^{१/४}$ असें.

वर्गमूळ काढायाचें.

* सांगितले संख्येस दोन दोन अंकस्थळांचे भागानीं यारीतीनें भागावी, संख्येंतील एकंमस्थळींचे अंकावर बिंदु करावा, नंतर शतमस्थळींचे अंकावर दुसरा बिंदु करावा, याप्रमाणें पुढेंही, म्हणजे केले बिंदूपासून एकस्थळ सोडून दुसऱ्यावर करावा, याप्रमाणें पूर्णांकांत एकमचे स्थळांपासून डावेकडे बिंदु करीत चालावें. आणि दशांत उजवेकडे.

डावेकडील शेवटचे प्रथमभागांत अतिमोठावर्ग काय आहे तें शोधावें, आणि त्याचें मूळ उजवेकडे जेथें भागाकार लिहितात तेथें मांडावें.

नंतर शोधून काढलेला अतिमोठा वर्ग त्या प्रथम भागांतून वजा करावा, आणि बाकी राहील तीचे उजवेकडे वरचा दुसरा भाग भाज्या करितां घ्यावा.

भाजका करितां वर लिहिलेलें मूळ दुप्पट करून लिहावा, आणि भाज्याचे उजवे शेवटचा एक अंक सोडून राहिले भाज्यांत हा भाजक-

* सांगितले संख्येचे दोन दोन अंकस्थळांचे भाग केले त्याचें कारण हें आहे कीं, केवळ एक अंकाचे वर्गास दोहों पेक्षां अधीक अंकस्थळें होत नाहींत; आणि दोन अंकस्थळांचे संख्येचे वर्गास चोहों पेक्षां अधीक अंकस्थळें होत नाहींत; याप्रमाणें पुढेंही. याजकरितां मूळांत इतकीं अंकस्थळें होतील कीं, सांगितले संख्येचे जितके भाग झाले आहेत.

आणि या कर्मांतील वेगळाले भूमीकांचे कारण बीजगणितांतील वर्गांचे रूपांपासून कळेल त्या वर्गांत पदें दोन, अथवा तीन किंवा याहून अधीक असतील, जसें, $(अ+ब)^२ = अ^२ + २अब + ब^२ = अ^२ + (२अ+ब)ब$, हा वर्ग आहे दोन पदांचा, ज्यांत दिसतें कीं, मूळाचें प्रथमपद अ आहे, आणि दुसरें ब, आणि प्रथमभाजक अ आहे, आणि नवा भाजक २अ+ब आहे, म्हणजे मूळांतील प्रथम पदाची दुप्पट दुसरे जवळचे पदानें वाढविलेली. याजकरितां मूळ काढण्याची रीति याप्रमाणें आहे.

प्रथम, भाजक अ) $अ^२ + २अब + ब^२$ (अ + ब हें मूळ.

$अ^२$

दुसरा, भाजक २अ+ब | $२अब + ब^२$

ब | $२अब + ब^२$

पुनः दुसरें मूळ, ज्यांत अ, ब, क, तीन पदें आहेत. जसें,

$(अ+ब+क)^२ = अ^२ + २अब + ब^२ + २अक + २बक + क^२ = अ^२ + (२अ+ब)ब + (२अ+२ब+क)क$, हा तीन पदांचा वर्ग आहे, ज्यांत त्याचे मूळाचें प्रथम पद अ, दुसरें पद ब, आणि तिसरें पद क आहे; आणि प्रथम भाजक अ आहे, दुसरा भाजक २अ+ब, तिसरा भाजक २अ+२ब+क. यांत याहून स्पष्ट कळेल कीं, प्रत्येक भाजक, मूळांतील पूर्वांची दुप्पट जवळचे नवे पदानें वाढविली याचे बरोबर आहे. आणि मूळ काढण्याची वर सांगितले रीतीचे बरोबर आहे. या टीपेविषयीं बीजांत मूळकर्माचें दुसरे प्रकारांत लिहिलें आहे तें पाहा.

कितीं वेळा जातो तें शोधावें; आणि तो वेळांक, भाजक आणि भागाकार यांचे उजवेकडे दोन स्थळीं लिहावा.

या वाढविले सर्वभाजकास त्या शेवटील वेळांकानें गुणावा, आणि तो गुणाकार भाज्यांतून वजा करावा. नंतर जो बाकी राहील तीचे जवळ वरचा पूर्वी घेतल्याचे जवळचा एक भाग नवे भाज्या करितां लिहावा.

नंतर मूळस्थळींचे सर्व अंक नवेभाजकाकरितां दुप्पट करून पूर्वप्रमाणें करावे. जों पर्यंत सांगितले संख्येचे सर्व भाग अनुक्रमें खालीं आणून काम पुरें होईल.

पाहा. नवे नवे भाजका करितां मूळ दुप्पट करण्याची ही रीति सर्वांहून सोपी आहे कीं, मूळाचे शेवटचा वेळांक पूर्व भाजकांत मिळवावा हें या पुढील उदाहरणावरून स्पष्ट समजेल- आणि सांगितले संख्येंतील सर्वभाग खालीं आणून कामकेल्यावर कांहीं बाकी राहून काम वाढवायाची इच्छा असल्यास प्रति बाकीवर दोनदोन शून्यें देऊन दशांशांत वाढवितां येतील.

उदाहरणें.

प्रथम, २९५०६६२४ याचें वर्गमूळ काढ.

२९५०६६२४(५४३२ हें, वर्गमूळ.

	२५
१०४	४५०
४	४१६
१०८३	३४६६
३	३२४९
१०८६२	२१७२४
२	२१७२४

पाहा. जेव्हां जें मूळ काढायाचें आहे त्यांत अंकस्थळें बहुत पाहिजेत, तेव्हां यारीति पासून कर्म फार संक्षेपानें होईल.

वर सांगितलें मूळ काढण्याचे रीति करून कर्म करीत चालावें, जों पर्यंत मूळाचे इच्छिले अंकस्थळांचे अर्धी किंवा एकाधिक अर्धीं अंक स्थळें उत्पन्न होतील; नंतर राहिलीं अंकस्थळें उत्पन्न कराया-

साठीं शेवटील भाज्य त्याचे भाजकानें दशांश संक्षेपरीतीनें भागावा; जसें;

दुसरें, २ याचें वर्गमूळ नव अंकस्थळें पर्यंत काढावें.

```
          २ ( १·४१४२१३५६
             १
      ─────┬──────
       २४  │ १००
        ४  │  ९६
      ──────┬──────
       २८१  │ ४००
         १  │ २८१
      ───────┬────────
       २८२४  │ ११९००
          ४  │ ११२९६
      ────────┬──────────
       २८२८२  │ ६०४००
           २  │ ५६५६४
      ────────┴────────────────
       २८२८४ ) ३८३६ ( १३५६
               १०००
                १६०
                 १९
                  २
```

तिसरें, २०२५ याचें वर्गमूळ काय. ?

उत्तर, ४५.

चवथें, १७·३०५९ याचें वर्गमूळ काय. ?

उत्तर, ४·१६

पांचवें, ·०००७२९ याचें वर्गमूळ काय. ?

उत्तर, ·०२७.

साहावें. ३ याचें वर्गमूळकाय ?

उत्तर, १·७३२०५०

सातवें, ५ याचें वर्गमूळ काय ?

उत्तर, २·२३६०६८

आठवें, ६ याचें वर्गमूळकाय ?

उत्तर, २·४४९४८९.

नववें, ७ याचें वर्गमूळ काय. ?

उत्तर, २·६४५७५१.

दाहावें, १० याचें वर्गमूळ काय ?

उत्तर, ३·१६२२७७.

अकरावें. ११ याचें वर्गमूळ काय ?

उत्तर, ३·३१६६२४.

बारावें, १२ याचें वर्गमूळ काय. ?

उत्तर, ३·४६४१०१.

व्यवहारी अपूर्णांक, आणि भागानुबंध पूर्णांक यांचीं वर्गमूळें काढण्याची, रीति.

कोणतेंही मूळ काढिल्याचे पूर्वी व्यवहारी अपूर्णांकास अति संक्षेप रूप दिलें पाहिजे. नंतर.

१ जर छेद पूर्णघात असेल तर अंश छेदांचीं वर्गमूळें वेगळालीं पूर्वरीतीनें काढून त्याचे त्याचे स्थळीं लिहावीं; छेद असे नसतील तर.

२ अंश आणि छेद परस्पर गुणून गुणाकाराचें मूळ काढावें; नंतर हें मूळ सांगितले अपूर्णांकाचे अंश स्थळीं किंवा छेदस्थळीं लिहावें, ह्मणजे तें रूप त्या अपूर्णांकाचें वर्गमूळ झालें.

म्हणजे $\sqrt{\frac{अ}{ब}} = \frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{ब}} = \frac{\sqrt{अब}}{ब} = \frac{अ}{\sqrt{अब}}$

ही सामान्य रीति स्तब्धमूळ आणि अनंत मूळ या दोहोंवर ही चालते.

३ अथवा व्यवहारी अपूर्णांकास दशांश रूप देऊन मग वर्गमूळ काढावें.

४ भागानुबंध पूर्णांकास व्यवहारी विषम अपूर्णांक रूप देऊन मग प्रथम आणि दुसरी या रीती करून त्याचें मूळ काढितां येईल. अथवा त्यांतील अपूर्णांकास दशांश रूप देऊन ते दशांश त्या पूर्णांकाशीं जोडून मग त्याचें मूळ काढावें.

उदाहरणें.

प्रथम, $\frac{२५}{३६}$ याचें वर्गमूळ काय ? उत्तर, $\frac{५}{६}$.

दुसरें, $\frac{१६}{४९}$ याचें वर्गमूळ काय ? उत्तर, $\frac{४}{७}$.

तिसरें, $\frac{१५}{१६}$ याचें वर्गमूळ काय ? उत्तर, ·९६६०२५.

चवथें, $\frac{५}{१२}$ याचें वर्गमूळ काय ? उत्तर, ·६४५४९७.

पांचवें, १७ $\frac{३}{८}$ याचें वर्गमूळ काय ? उत्तर, ४·१६८३३.

वर्गमूळाचे सहायानें कोणतेही घाताचें मूळ निघतें, ज्याचा भकाशक २ याचा कोणताही घात आहे, जसें, चतुर्घात मूळ, अष्टघातमूळ, षोडश घात मूळ इत्यादि. भकाशक दोहोंचा वर्ग आहे तर वर्गमूळकाढून पुनः त्याचें वर्गमूळ काढावें. असें द्विरावृत्त मूळ काढावें, अष्टघाताचें त्रिरावृत्त मूळ इत्यादि.

म्हणजे २१०३५८ याचें चतुर्घातमूळ काढणें तर वर्गमूळखालीं सांगतों याप्रमाणें द्विरावृत्त काढिलें पाहिजे.

२१०३५८०००(१४५०३७२३७)१२०४३१४०७ हेंचतुर्घातमूळ.

	१		१
२४	११०	२२	४५
४	९६	२	४४
२८५	१४३५	२४०४	११३७२
५	१४२५	४	९६१६
२९००३	१०८०००	२४०८३	७५६३७
३	८७००९	३	७२२४९
२९००६)	२०९९१(७२३७		३३८८(१४०७
	६८७		९८०
	१०७		१७

दुसरें, ९७[२०]४१ याचें चतुर्घात मूळ काय?

घनमूळ काढायाची प्रथम सामान्य रीति ∗

∗ सांगितली संख्या तीन तीन अंकस्थळांचे भागानीं भागायाचें कारण हेंच आहे कीं, केवळ एक अंकाचा घन तीन अंकस्थळांपेक्षां अधिक होत नाहीं. आणि अशा कारणास्तव चतुर्घात मूळ काढणें तर सांगितली संख्या चारचार अंकस्थळांचे अंकानीं भागावी; पंचघात मूळकाढणें तर पांच पांच अंकस्थळांचे भागांनी या प्रमाणें पुढेंही.

रीतीचे दुसरे भूमिकेस बीजघन आश्रय आहे; कांजर मूळांत अ + द; हीं दोन पदें आहेत, तर त्याचा घन पुढें लिहितों याप्रमाणें आहे, $(अ+ब)^३ = अ^३ + ३अ^२ब + ३अब^२ + ब^३$; यांत प्रथमपद $अ^३$ त्याचेंमूळ अ, आहे; नवाभाज्य $३अ^२ब + ३अब^२ + ब^३$ हा आणि शोधक यांचीं वेगळालीं पदें बरोबर आहेत; पुनः भाजक $३अ^२ + ३अ$, आहे ज्यानें नवे भाज्यांची $३अ^२ब + ३अब^२$ या दोनपदास भागून मूळाचें दुसरें पद ब उत्पन्न होतें; असें पुढेंही.

१ सांगितले संख्येस तीन तीन अंकस्थळांचे भागानीं यारीतीनें भागावी, संख्येंतील एकमस्थळींचे अंकावर बिंदू करावा, नंतर सहस्त्रमचेस्थळींचे अंकावर दुसरा बिंदु करावा, याप्रमाणें पुढेंही. म्हणजे केलेबिंदूपासून डावेकडे दोन स्थळें सोडून तिसऱ्यावर करावा. याप्रमाणें पूर्णांकांत एकमचे स्थळांपासून डावेकडे बिंदु करीतजावें, आणि दशांशांत उजवेकडे. नंतर डावेकडील शेवटचे प्रथम भागांत अति मोठा घन काय आहे तें शोधावें. आणि त्याचें मूळ उजवेकडे जेथें भागाकार लिहितात तेथें मांडावें. नंतर शोधून काढिलेला अति मोठा घन त्या प्रथमभागांतून वजा करावा. आणि बाकी राहील तिचे उजवेकडे भाज्याकरितां वरचा दुसरा भाग घ्यावा त्यास नवा भाज्य ह्मणावा.

२ वरलिहिलेले मुळाचे वर्गाची तिप्पट करून लिहावी, आणि त्याचें खालीं त्याच मूळाची तिपट करून एक अंक स्थळ पुढें जाई अशी लिहावी. आणि त्यांची बेरीज घ्यावी, या बेरिजेस नवा भाजक ह्मणावें, नंतर भाज्याचा शेवटील अंक सोडून राहिली संख्या या भाजकानें भागितां भागाकार काय होईल तो त्या मुळाचे जवळ लिहावा. आतां मूळ स्थळीं दोन अंक झाले, त्यांत प्रथमास अ नाव ठेवावें, आणि दुसऱ्यास ई.

३ या पुढील तीन गुणाकारांची बेरीज घ्यावी, ह्मणजे तिपट अचा वर्ग गुणिला ई, तिपट अ गुणिला ई वर्ग, आणि ई घन. हे तीन गुणाकार अनुक्रमें एकेक अंक स्थळ पुढें सारून लिहावे, नंतर त्यांचे बेरिजेस हीनकर्तव्य नाव ठेवावें. परंतु हा नवेभाज्या पेक्षां अधिक नसावा, कदाचित् अधीक झालातर मूळस्थळींचा शेवटील ई अंक उणाकरिन गेलें पाहिजे जों पर्यंत हा हीनकर्तव्य, नवे भाज्या पेक्षां उणा येईल.

४ नवे भाज्यांतून हीनकर्तव्य वजाकरावा, आणि बाकी पुढें नवे भाज्याकरितां वरचा दुसरा भाग जोडावा; त्यास नवा भाजक असावा तो मग के मूळस्थळींचे अंकांपासून पूर्व प्रमाणें उत्पन्न करावा; या नवेभाज्य भाजकां पासून रीतीचे दुसरे भूमिके प्रमाणें मूळाचा दुसरा अंक उत्पन्न होईल, आणि ह्या प्रमाणें पुढेंही.

उदाहरणें.

प्रथम, ४८२२८.५४४ याचें घनमूळ काढ.

$३+३^२=२७$ $३+३=०९$	४८·२२८·५४४ (३६·४ २७	हें, घनमूळ.
नवा भाजक २७०	२१२२८	नवा भाज्य.
$३+३+६=$ १६२ $३+३+६^२=$ ३२४ $६^३=$ २१६		बेरीज घे.
$३+३६^२=३८८८$ $३+३६=१०८$	१९६५६	शोधक.
नवा भाजक. ३८९८८	१५७२५४४	नवा भाज्य.
$३+३६^२+४=$ १५५५२ $३+३६+४^२=$ १७२८ $४^३=$ ६४		बेरीज घे.
	१५७२५४४.	शोधक.
	०००००००	

दुसरें, ५७१४८२·१९ याचें घनमूळ काढ.

उत्तर, ८२·९ इत्यादि.

तिसरें, १६२८·१५८२ याचें घनमूळ काढ.

उत्तर, ११·७६४२

चवथें, १३३२ याचें घनमूळ काढ.

उत्तर, ११·००२७.

दुसरी संक्षेपानें घनमूळ काढायाची.*

१ समारानें अथवा मूळ कोष्टकांपासून, पृष्ठ ७७ इत्यादि. सांगितले संख्येचा संनिध अधिक किंवा उणा अखंड घन घ्यावा, आणि त्यास घे

---

* घनमूळ काढण्याची जी सामान्यतः रीति सांगितली आहे, ती फार दीर्घ कंटाळवाणी आणि स्मरणांत ठेवण्यास कठीण, याजकरितां संनिध मूळ काढण्याच्या दुसऱ्या विविध रीति न्यूटन, राफ्सन्, हालीड डाक्टर, सिंफ्सन्, एमरसन, आणि दुसरे ज्योतिषी यानीं कल्पिल्या आहेत; परंतु सरळ रूपाची आणि सामान्यतः कामांत फार उपयोगी अशी ही रीति पाहिली, याप्रमाणें त्यांत दुसरी कोणतीही नाहीं, तिचें बिजरूप हेंच आहे.

जसें, प+२अ अ+२प : : र : ल, अथवा.

जसें, प+२अ : प∾अ : : र : ल∾र.

यांत सांगितली संख्या आहे. अ, घेतलेला अतिसंनिध घन आहे, र, अचें घनमूळ आहे. आणि ल, पचें इछिलें मूळ आहे.

तला घन ह्मणावा.

२ नंतर त्रैराशिकानें ह्मणावें. जसें. सांगितली संख्या आणि घेतले घना ची दुपट यांची बेरीज. घेतलाघन आणि सांगितले संख्येची दुपट यांचे बे रिजेस आहे. तसें घेतलें घनाचें मूळ. सांगितले संख्येचे मूळा जवळ ज वळ होईल. अथवा जसें प्रथम बेरीज. सांगितली संख्या आणि घेतलेला घन, यांचे वजाबाकीस आहे, तसें घेतलेले घनाचें मूळ, इच्छि लें मूळ आणि घेतलेले घनाचेंमूळ यांचे वजाबाकीस होईल.

३ पुनः अशारीतीनें उत्पन्न केले मूळाचा घन करून तो घेतलाघन असें मानून वर प्रमाणें तपशील करावा, ह्मणजे अतिसंनिध दुसरें मूळ उत्पन्न होईल, या प्रमाणें उत्तरोत्तर उत्पन्न झालेले मूळाचा पुनःपुनः घ न करून तो घेतला घन मानून वरप्रमाणें तपशील करीत जावें, ह्म- णजे उत्तरोत्तर फारच अति संनिध मूळ निघेल.

उदाहरणें.

प्रथम, २१०३५.८ याचें घनमूळ.

यांत त्वरेनें कळतें कीं, याचें घनमूळ २० आणि ३० या दोनसंख्यां चे मध्यें आहे, आणि पुनः शोधितां लक्षांत येतें कीं, २७ आणि २८ या दोहोंच्या आंत आहे, याजकरितां स २७ घेऊन त्याचा घन १९६८३ आहे, हा वर सांगितल्या प्रमाणें घेतलाघन आहे, तेव्हां.

```
        १९६८३        २१०३५.८
            २              २
      -------      --------
        ३९३६६       ४२०७१.६
      २१०३५.८        १९६८३
      -------      --------
जसें.   ६०४०१.८      ६१७५४.६ :: २७ : २७.६०४७.
                          २७
                   --------
                    ४३२२८२२
                   १२३५०९२
                  ---------
६०४०१.८ ) १६६७३७४.२ ( २७.६०४७. हें घनमूळ संनिध आहे.
             ४५९३३८
             ३६५२५
               २८४
                ४२
```

पुनः दुसऱ्यान तर्क करून त्याचे मूळाचा घन २१०३५.११८...

५१५५५८२१ आहे, आणि दुसरे भूमिकेंतील दुसरे प्रकारानें कर्म करून या प्रमाणें होईल.

२१०३५·३१८९८५. इत्यादि.
  २

४२०७०६३७२१० / २१०३५·८   २१०३५·८ / २१०३५·३१८९८५ इत्यादि.

६३१०६·४३७२१ : : ४८१३५५ : : २७·९०४३ . ०००२१०५६०
०००२१०५६०

२१९०४११०५६० हें अतिसंनिध मूळ.

दुसरें. ६२ याचें घनमूळ काढ.
तिसरें: ०१ याचें घनमूळ काढ.

कोणतेंही मूळ काढण्याची. +

प. हें सांगितले संख्येचें अक्षर चिन्ह असून, न, हें सांगितले संख्येचें वर्गमूळादिप्रकाशक अक्षर चिन्ह. अ. हे कोणतेंही घेतले मूळाचे वर्गादीचें अक्षर चिन्ह, र. हें या घेतले वर्गादीचें मूळ. ल, हें पक्कें इच्छिलें मूळ; नंतर या प्रमाणें ह्मणावें.

जशी न+१ वेळा अ आणि न−१ वेळा प ही बेरीज
न+१ वेळा प आणि न−१ वेळा अ यांचे बेरिजेस होते:
तसें घेतलें मूळ र: इच्छिलें ल या मूळास होईल.

अथवा. जसें न+१ वेळा अ आणि न−१ वेळा प यांचे बेरिजेचें अर्ध.

सांगितला आणि घेतला या घातांचें वजाबाकीस होईल.

तसें घेतलें मूळ र: घेतलें आणि खरें या मूळांचे वजाबाकीस होईल.

आणि ही वजाबाकी घेतले मूळांत मिळविली अथवा वजा केली जसें कामांत येईल त्या प्रमाणें केलें असतां खरें मूळ होईल.

म्हणजे.

जसा $\overline{न+१}$ अ + $\overline{न-१}$ प : $\overline{न+१}$ प + $\overline{न-१}$ अ : : र : ल

+ ही सान्निध मूळरीति, सर्व घातांचे मूळांस सामान्य आहे. आणि पूर्वी सांगितली जी विशेषरीति घन मूळावर मात्र लागते.

अथवा.

$\overline{न+१}\cdot\frac{१}{२}अ+\overline{न-१}\cdot\frac{१}{२}प : प - अ :: र : ल - र$.

आणि या प्रमाणें पुनः पुनः करून दुसरें दुसरें खरें मूळ काढावें परंतु प्रत्येक प्रमाणांत शेवटीं निघालेलें मूळ र. आणि त्या मूळाचा घात न. आणि घेतलेंवर्गादि अ, होईल; या प्रमाणें अक्षर चिन्हें करावीं.

उदाहरणें.

२१०३५.८ याचें पंचघातमूळ काढावयाचें.

या उदाहरणां[illegible] दिसतें कीं. याचें पंचघात मूळ ७.३ आणि ७.४ या २ संख्यांत मध्यें आहे. आतां ७.३ हें घेतलेंमूळ याचा पंचघात २०७३०.७१५९३ यांत प = २१०३५.८. न = ५, र = ७.३, अ = २०७३०.७१५९३. तर दुसरे रीतिप्रमाणें.

$\overline{५+१}$ १०३६५.३५७९६५+५−१·१०५१७.९ : ३०५.०८४ :: ७.३ :

६२१९२.१४७७९०　४२०७१.६　६१५ ५५२
+४२०७१.६　२१३५ ५८८

१०४२६३.७४७७९０　२२२७ ११३२

२२२७ ११३२ { [illegible] र−ल
७.३ = र

[illegible] −ल　हें इच्छिलें पंचघातमूळ होय.

दुसरीं उदाहरणें.

प्रथम. २ याचें घनमूळ काढ. उत्तर १.२५९९२१.

दुसरें. [illegible]१४ याचें घनमूळ काढ. उत्तर, १४.[illegible].

तिसरें, [illegible] याचें घनमूळ काढ. उत्तर. [illegible]

चवथें. ९७.४१ याचें चतुर्घात मूळ काढ. उत्तर, ३.१४१११११.

पांचवें. २ याचें पंचघात मूळ काढ. उत्तर, १.१४८६९८.

साहावें. २१०३५. ८ याचें षड्घातमूळ काढ. उत्तर, [illegible]

सातवें. २ याचें षड्घात मूळ काढ.

उत्तर, १·१२२४६२.

आठवें, २१०३५·८ याचे सप्तघातमूळ काढ.

उत्तर, ४·१४५२०१

नववें, २ याचें सप्तघातमूळ काढ.

उत्तर, १·१०४०८९.

दाहावें, २१०३५·८ याचें अष्टघातमूळ काढ.

उत्तर, ३·४७०३२३

अकरावें, २ याचें अष्टघातमूळ काढ.

उत्तर, १·०९०५०८.

बारावें, २१०३५·८ याचें नवघातमूळ काढ.

उत्तर, ३·०२२२३९.

तेरावें, २ याचें नवघातमूळ काढ.

उत्तर, १०८००५९.

जे पुढें लिहिलोंने १ पासून १००० पर्यंत संख्यांचे वर्ग, आणि घन, यांचें, व, वर्गमूळ, आणि घनमूळ यांचे कोष्टक आहेत, आणि ते गणित कर्मांत जेथें मूळें आणि घात यांचें काम येतें तेथें फार उपयोगी पडतील.

या कोष्टकांचा उपयोग शून्य अथवा दशांश चिन्हाचें स्थळ बदल केल्यानें बहुत संख्यांचे कामांत येतो, जसें या पुढील उदाहरणा पासून कळेल.

मूळ.	वर्ग.	घन.
३६	१२९६	४६६५६
३६०	१२९६००	४६६५६०००
३६००	१२९६००००	४६६५६०००००
५४६	२९८११६	१६२७७१३३६
५·४६	२९·८११६	१६२·७७१३३६
·५४६	·२९८११६	·१६२७७१३३६

वर्ग, घन, आणि मूळ.

संख्या.	वर्ग.	घन.	वर्गमूळ.	घनमूळ.
१	१	१	१·०००००००	१·००००००
२	४	८	१·४१४२१३६	१·२५९९२१
३	९	२७	१·७३२०५०८	१·४४२२५०
४	१६	६४	२·०००००००	१·५८७४०१
५	२५	१२५	२·२३६०६८०	१·७०९९७६
६	३६	२१६	२·४४९४८९७	१·८१७१२१
७	४९	३४३	२·६४५७५१३	१·९१२९३३
८	६४	५१२	२·८२८४२७१	२·००००००
९	८१	७२९	३·०००००००	२·०८००८४
१०	१००	१०००	३·१६२२७७७	२·१५४४३५
११	१२१	१३३१	३·३१६६२४८	२·२२३९८०
१२	१४४	१७२८	३·४६४१०१६	२·२८९४२८
१३	१६९	२१९७	३·६०५५५१३	२·३५१३३५
१४	१९६	२७४४	३·७४१६५७४	२·४१०१४२
१५	२२५	३३७५	३·८७२९८३३	२·४६६२१२
१६	२५६	४०९६	४·०००००००	२·५१९८४२
१७	२८९	४९१३	४·१२३१०५६	२·५७१२८२
१८	३२४	५८३२	४·२४२६४०७	२·६२०७४१
१९	३६१	६८५९	४·३५८८९८९	२·६६८४०२
२०	४००	८०००	४·४७२१३६०	२·७१४४१८
२१	४४१	९२६१	४·५८२५७५७	२·७५८९२४
२२	४८४	१०६४८	४·६९०४१५८	२·८०२०३९
२३	५२९	१२१६७	४·७९५८३१५	२·८४३८६७
२४	५७६	१३८२४	४·८९८९७९५	२·८८४४९९
२५	६२५	१५६२५	५·०००००००	२·९२४०१८
२६	६७६	१७५७६	५·०९९०१९५	२·९६२४९६
२७	७२९	१९६८३	५·१९६१५२४	३·००००००

वर्ग, घन, आणि मूळ.

संख्या	वर्ग	घन	वर्गमूळ	घनमूळ
२८	७८४	२१९५२	५.२९१५०२६	३.०३६५८९
२९	८४१	२४३८९	५.३८५१६४८	३.०७२३१७
३०	९००	२७०००	५.४७७२२५६	३.१०७२३२
३१	९६१	२९७९१	५.५६७७६४४	३.१४१३८१
३२	१०२४	३२७६८	५.६५६८५४२	३.१७४८०२
३३	१०८९	३५९३७	५.७४४५६२६	३.२०७५३४
३४	११५६	३९३०४	५.८३०९५१९	३.२३९६१२
३५	१२२५	४२८७५	५.९१६०७९८	३.२७१०६६
३६	१२९६	४६६५६	६.०००००००	३.३०१९२७
३७	१३६९	५०६५३	६.०८२७६२५	३.३३२२२२
३८	१४४४	५४८७२	६.१६४४१४०	३.३६१९७५
३९	१५२१	५९३१९	६.२४४९९८०	३.३९१२११
४०	१६००	६४०००	६.३२४५५५३	३.४१९९५२
४१	१६८१	६८९२१	६.४०३१२४२	३.४४८२१७
४२	१७६४	७४०८८	६.४८०७४०७	३.४७६०२७
४३	१८४९	७९५०७	६.५५७४३८५	३.५०३३९८
४४	१९३६	८५१८४	६.६३३२४९६	३.५३०३४८
४५	२०२५	९११२५	६.७०८२०३९	३.५५६८९३
४६	२११६	९७३३६	६.७८२३३००	३.५८३०४८
४७	२२०९	१०३८२३	६.८५५६५४६	३.६०८८२६
४८	२३०४	११०५९२	६.९२८२०३२	३.६३४२४१
४९	२४०१	११७६४९	७.०००००००	३.६५९३०६
५०	२५००	१२५०००	७.०७१०६७८	३.६८४०३१
५१	२६०१	१३२६५१	७.१४१४२८४	३.७०८४३०
५२	२७०४	१४०६०८	७.२१११०२६	३.७३२५११
५३	२८०९	१४८८७७	७.२८०१०९९	३.७५६२८६
५४	२९१६	१५७४६४	७.३४८४६९२	३.७७९७६३

वर्ग घन, आणि मूळ

संख्या	वर्ग	घन	वर्गमूळ	घनमूळ
५५	३०२५	१६६३७५	७.४१६१९८५	३.८०२९५२५
५६	३१३६	१७५६१६	७.४८३३१४८	३.८२५८६२४
५७	३२४९	१८५१९३	७.५४९८३४४	३.८४८५०११
५८	३३६४	१९५११२	७.६१५७७३१	३.८७०८७६६
५९	३४८१	२०५३७९	७.६८११४५७	३.८९२९९६५
६०	३६००	२१६०००	७.७४५९६६७	३.९१४८६७६
६१	३७२१	२२६९८१	७.८१०२४९७	३.९३६४९७२
६२	३८४४	२३८३२८	७.८७४००७९	३.९५७८९१५
६३	३९६९	२५००४७	७.९३७२५३९	३.९७९०५७१
६४	४०९६	२६२१४४	८.०००००००	४.०००००००
६५	४२२५	२७४६२५	८.०६२२५७७	४.०२०७२५६
६६	४३५६	२८७४९६	८.१२४०३८४	४.०४१२४०१
६७	४४८९	३००७६३	८.१८५३५२८	४.०६१५४८०
६८	४६२४	३१४४३२	८.२४६२११३	४.०८१६५५१
६९	४७६१	३२८५०९	८.३०६६२३९	४.१०१५६६१
७०	४९००	३४३०००	८.३६६६००३	४.१२१२८५३
७१	५०४१	३५७९११	८.४२६१४९८	४.१४०८१७८
७२	५१८४	३७३२४८	८.४८५२८१४	४.१६०१६७६
७३	५३२९	३८९०१७	८.५४४००३७	४.१७९३३९०
७४	५४७६	४०५२२४	८.६०२३२५३	४.१९८३३६४
७५	५६२५	४२१८७५	८.६६०२५४०	४.२१७१६३३
७६	५७७६	४३८९७६	८.७१७७९७९	४.२३५८२३६
७७	५९२९	४५६५३३	८.७७४९६४४	४.२५४३२१०
७८	६०८४	४७४५५२	८.८३१७६०९	४.२७२६५८६
७९	६२४१	४९३०३९	८.८८८१९४४	४.२९०८४०४
८०	६४००	५१२०००	८.९४४२७१९	४.३०८८६९५
८१	६५६१	५३१४४१	९.०००००००	४.३२६७४८७
८२	६७२४	५५१३६८	९.०५५३८५१	४.३४४४८१५

वर्ग, घन आणि मूळ.

संख्या	वर्ग	घन	वर्गमूळ	घनमूळ.
१४१	१९८८१	२८०३२२१	११·८७४३४२१	५·२०४८२८
१४२	२०१६४	२८६३२८८	११·९१६३७५३	५·२१७१०३
१४३	२०४४९	२९२४२०७	११·९५८२६०७	५·२२९३२१
१४४	२०७३६	२९८५९८४	१२·०००००००	५·२४१४८३
१४५	२१०२५	३०४८६२५	१२·०४१५९४६	५·२५३५८८
१४६	२१३१६	३११२१३६	१२·०८३०४६०	५·२६५६३७
१४७	२१६०९	३१७६५२३	१२·१२४३५५७	५·२७७६३२
१४८	२१९०४	३२४१७९२	१२·१६५५२५१	५·२८९५७२
१४९	२२२०१	३३०७९४९	१२·२०६५५५६	५·३०१४५९
१५०	२२५००	३३७५०००	१२·२४७४४८७	५·३१३२९३
१५१	२२८०१	३४४२९५१	१२·२८८२०५७	५·३२५०७४
१५२	२३१०४	३५११८०८	१२·३२८८२८०	५·३३६८०३
१५३	२३४०९	३५८१५७७	१२·३६९३१६९	५·३४८४८१
१५४	२३७१६	३६५२२६४	१२·४०९६७३६	५·३६०१०८
१५५	२४०२५	३७२३८७५	१२·४४९८९९६	५·३७१६८५
१५६	२४३३६	३७९६४१६	१२·४८९९९६०	५·३८३२१३
१५७	२४६४९	३८६९८९३	१२·५२९९६४१	५·३९४६९१
१५८	२४९६४	३९४४३१२	१२·५६९८०५१	५·४०६१२०
१५९	२५२८१	४०१९६७९	१२·६०९५२०२	५·४१७५०१
१६०	२५६००	४०९६०००	१२·६४९११०६	५·४२८८३५
१६१	२५९२१	४१७३२८१	१२·६८८५७७५	५·४४०१२२
१६२	२६२४४	४२५१५२८	१२·७२७९२२१	५·४५१३६२
१६३	२६५६९	४३३०७४७	१२·७६७१४५३	५·४६२५५६
१६४	२६८९६	४४१०९४४	१२·८०६२४८५	५·४७३७०४
१६५	२७२२५	४४९२१२५	१२·८४५२३२६	५·४८४८०७
१६६	२७५५६	४५७४२९६	१२·८८४०९८७	५·४९५८६५
१६७	२७८८९	४६५७४६३	१२·९२२८४८०	५·५०६८७९
१६८	२८२२४	४७४१६३२	१२·९६१४८१४	५·५१७८४८
१६९	२८५६१	४८२६८०९	१३·०००००००	५·५२८७७३
१७०	२८९००	४९१३०००	१३·०३८४०४८	५·५३९६५८

वर्ग, घन, आणि मूळ.

संख्या	वर्ग	घन	वर्गमूळ,	घनमूळ,
१७१	२९२४१	५०००२११	१३.०७६६९६८	५.५५०४९७
१७२	२९५८४	५०८८४४८	१३.११४८७७०	५.५६१२९८
१७३	२९९२९	५१७७७१७	१३.१५२९४६४	५.५७२०५५
१७४	३०२७६	५२६८०२४	१३.१९०९०६०	५.५८२७७०
१७५	३०६२५	५३५९३७५	१३.२२८७५६६	५.५९३४४७
१७६	३०९७६	५४५१७७६	१३.२६६४९९२	५.६०४०७९
१७७	३१३२९	५५४५२३३	१३.३०४१३४७	५.६१४६७२
१७८	३१६८४	५६३९७५२	१३.३४१६६४१	५.६२५२२६
१७९	३२०४१	५७३५३३९	१३.३७९०८८२	५.६३५७४१
१८०	३२४००	५८३२०००	१३.४१६४०७९	५.६४६२१६
१८१	३२७६१	५९२९७४१	१३.४५३६२४०	५.६५६६५२
१८२	३३१२४	६०२८५६८	१३.४९०७३७६	५.६६७०५१
१८३	३३४८९	६१२८४८७	१३.५२७७४९३	५.६७७४११
१८४	३३८५६	६२२९५०४	१३.५६४६६००	५.६८७७३४
१८५	३४२२५	६३३१६२५	१३.६०१४७०५	५.६९८०१९
१८६	३४५९६	६४३४८५६	१३.६३८१८१७	५.७०८२६७
१८७	३४९६९	६५३९२०३	१३.६७४७९४३	५.७१८४७९
१८८	३५३४४	६६४४६७२	१३.७११३०९२	५.७२८६५४
१८९	३५७२१	६७५१२६९	१३.७४७७२७१	५.७३८७९४
१९०	३६१००	६८५९०००	१३.७८४०४८८	५.७४८८९७
१९१	३६४८१	६९६७८७१	१३.८२०२७५०	५.७५८९६५
१९२	३६८६४	७०७७८८८	१३.८५६४०६५	५.७६८९९८
१९३	३७२४९	७१८९०५७	१३.८९२४४४०	५.७७८९९६
१९४	३७६३६	७३०१३८४	१३.९२८३८८३	५.७८८९६०
१९५	३८०२५	७४१४८७५	१३.९६४२४००	५.७९८८९०
१९६	३८४१६	७५२९५३६	१४.००००००	५.८०८७८६
१९७	३८८०९	७६४५३७३	१४.०३५६६८८	५.८१८६४८
१९८	३९२०४	७७६२३९२	१४.०७१२४७३	५.८२८४७७
१९९	३९६०१	७८८०५९९	१४.१०६७३६०	५.८३८२७२
२००	४००००	८००००००	१४.१४२१३५६	५.८४८०३५

वर्ग, घन, आणि मूळ.

संख्या	वर्ग.	घन	वर्गमूळ	घनमूळ.
२०१	४०४०१	८१२०६०१	१४·१७७४४६९	५·८५७७६६
२०२	४०८०४	८२४२४०८	१४·२१२६७०४	५·८६७४६४
२०३	४१२०९	८३६५४२७	१४·२४७८०६८	५·८७७१३०
२०४	४१६१६	८४८९६६४	१४·२८२८५६९	५·८८६७६५
२०५	४२०२५	८६१५१२५	१४·३१७८२११	५·८९६३६८
२०६	४२४३६	८७४१८१६	१४·३५२७००१	५·९०५९४१
२०७	४२८४९	८८६९७४३	१४·३८७४९४६	५·९१५४८२
२०८	४३२६४	८९९८९१२	१४·४२२२०५१	५·९२४९९२
२०९	४३६८१	९१२९३२९	१४·४५६८३२३	५·९३४४७३
२१०	४४१००	९२६१०००	१४·४९१३७६७	५·९४३९२२
२११	४४५२१	९३९३९३१	१४·५२५८३९०	५·९५३३४२
२१२	४४९४४	९५२८१२८	१४·५६०२१९८	५·९६२७३१
२१३	४५३६९	९६६३५९७	१४·५९४५१९५	५·९७२०९१
२१४	४५७९६	९८००३४४	१४·६२८७३८८	५·९८१४२६
२१५	४६२२५	९९३८३७५	१४·६६२८७८३	५·९९०७२७
२१६	४६६५६	१००७७६९६	१४·६९६९३८५	६·००००००
२१७	४७०८९	१०२१८३१३	१४·७३०९१९९	६·००९२४४
२१८	४७५२४	१०३६०२३२	१४·७६४८२३१	६·०१८४६२
२१९	४७९६१	१०५०३४५९	१४·७९८६४८६	६·०२७६५०
२२०	४८४००	१०६४८०००	१४·८३२३९७०	६·०३६८११
२२१	४८८४१	१०७९३८६१	१४·८६६०६८७	६·०४५९४३
२२२	४९२८४	१०९४१०४८	१४·८९९६६४४	६·०५५०४८
२२३	४९७२९	११०८९५६७	१४·९३३१८४५	६·०६४१२६
२२४	५०१७६	११२३९४२४	१४·९६६६२९५	६·०७३१७८
२२५	५०६२५	११३९०६२५	१५·०००००००	६·०८२२०१
२२६	५१०७६	११५४३१७६	१५·०३३२९६४	६·०९११९९
२२७	५१५२९	११६९७०८३	१५·०६६५१९२	६·१००१७०
२२८	५१९८४	११८५२३५२	१५·०९९६६८९	६·१०९११५
२२९	५२४४१	१२००८९८९	१५·१३२७४६०	६·११८०३३
२३०	५२९००	१२१६७०००	१५·१६५७५०९	६·१२६९२६

वर्ग, घन आणिमूळ

संख्या,	वर्ग,	घन,	वर्गमूळ,	घनमूळ.
२३१	५३३६१	१२३२६३९१	१५.१९८६८४२	६.१३५७९२
२३२	५३८२४	१२४८७१६८	१५.२३१५४६२	६.१४४६३४
२३३	५४२८९	१२६४९३३७	१५.२६४३३७५	६.१५३४४९
२३४	५४७५६	१२८१२९०४	१५.२९७०५८५	६.१६२२३९
२३५	५५२२५	१२९७७८७५	१५.३२९७०९७	६.१७१००६
२३६	५५६९६	१३१४४२५६	१५.३६२२९१५	६.१७९७४७
२३७	५६१६९	१३३१२०५३	१५.३९४८०४३	६.१८८४६३
२३८	५६६४४	१३४८१२७२	१५.४२७२४८६	६.१९७१५४
२३९	५७१२१	१३६५१९१९	१५.४५९६२४८	६.२०५८२२
२४०	५७६००	१३८२४०००	१५.४९१९३३४	६.२१४४६५
२४१	५८०८१	१३९९७५२१	१५.५२४१७४७	६.२२३०८४
२४२	५८५६४	१४१७२४८८	१५.५५६३४९२	६.२३१६७६
२४३	५९०४९	१४३४८९०७	१५.५८८४५७३	६.२४०२५१
२४४	५९५३६	१४५२६७८४	१५.६२०४९९४	६.२४८८००
२४५	६००२५	१४७०६१२५	१५.६५२४७५८	६.२५७३२४
२४६	६०५१६	१४८८६९३६	१५.६८४३८७१	६.२६५८२६
२४७	६१००९	१५०६९२२३	१५.७१६२३३६	६.२७४३०४
२४८	६१५०४	१५२५२९९२	१५.७४८०१५७	६.२८२७६१
२४९	६२००१	१५४३८२४९	१५.७७९७३३८	६.२९११९५
२५०	६२५००	१५६२५०००	१५.८११३८८३	६.२९९६०५
२५१	६३००१	१५८१३२५१	१५.८४२९७९५	६.३०७९९४
२५२	६३५०४	१६००३००८	१५.८७४५०७९	६.३१६३५९
२५३	६४००९	१६१९४२७७	१५.९०५९७३७	६.३२४७०४
२५४	६४५१६	१६३८७०६४	१५.९३७३७७५	६.३३३०२६
२५५	६५०२५	१६५८१३७५	१५.९६८७१९४	६.३४१३२६
२५६	६५५३६	१६७७७२१६	१६.०००००००	६.३४९६०४
२५७	६६०४९	१६९७४५९३	१६.०३१२१९५	६.३५७८६१
२५८	६६५६४	१७१७३५१२	१६.०६२३७८४	६.३६६०९५
२५९	६७०८१	१७३७३९७९	१६.०९३४७६९	६.३७४३११
२६०	६७६००	१७५७६०००	१६.१२४५१५५	६.३८२५०४

वर्ग, घन, आणिमूळ.

संख्या	वर्ग.	घन.	वर्गमूळ.	घनमूळ.
२६१	६८१२१	१७७७९५८१	१६.१५५४९४४	६.३९०६७६
२६२	६८६४४	१७९८४७२८	१६.१८६४१४१	६.३९८८२८
२६३	६९१६९	१८१९१४४७	१६.२१७२७४७	६.४०६९५८
२६४	६९६९६	१८३९९७४४	१६.२४८०७६८	६.४१५०६९
२६५	७०२२५	१८६०९६२५	१६.२७८८२०६	६.४२३१५८
२६६	७०७५६	१८८२१०९६	१६.३०९५०६४	६.४३१२२८
२६७	७१२८९	१९०३४१६३	१६.३४०१३४६	६.४३९२७७
२६८	७१८२४	१९२४८८३२	१६.३७०७०५५	६.४४७३०६
२६९	७२३६१	१९४६५१०९	१६.४०१२१९५	६.४५५३१५
२७०	७२९००	१९६८३०००	१६.४३१६७६७	६.४६३३०४
२७१	७३४४१	१९९०२५११	१६.४६२०७७६	६.४७१२७४
२७२	७३९८४	२०१२३६४८	१६.४९२४२२५	६.४७९२२४
२७३	७४५२९	२०३४६४१७	१६.५२२७११६	६.४८७१५४
२७४	७५०७६	२०५७०८२४	१६.५५२९४५४	६.४९५०६५
२७५	७५६२५	२०७९६८७५	१६.५८३१२४०	६.५०२९५६
२७६	७६१७६	२१०२४५७६	१६.६१३२४७७	६.५१०८३०
२७७	७६७२९	२१२५३९३३	१६.६४३३१७०	६.५१८६८४
२७८	७७२८४	२१४८४९५२	१६.६७३३३२०	६.५२६५१९
२७९	७७८४१	२१७१७६३९	१६.७०३२९३१	६.५३४३३५
२८०	७८४००	२१९५२०००	१६.७३३२००५	६.५४२१३३
२८१	७८९६१	२२१८८०४१	१६.७६३०५४६	६.५४९९१२
२८२	७९५२४	२२४२५७६८	१६.७९२८५५६	६.५५७६७२
२८३	८००८९	२२६६५१८७	१६.८२२६०३८	६.५६५४१४
२८४	८०६५६	२२९०६३०४	१६.८५२२९९५	६.५७३१३८
२८५	८१२२५	२३१४९१२५	१६.८८१९४३०	६.५८०८४४
२८६	८१७९६	२३३९३६५६	१६.९११५३४५	६.५८८५३२
२८७	८२३६९	२३६३९९०३	१६.९४१०७४३	६.५९६२०१
२८८	८२९४४	२३८८७८७२	१६.९७०५६२७	६.६०३८५४
२८९	८३५२१	२४१३७५६९	१७.०००००००	६.६११४८९
२९०	८४१००	२४३८९०००	१७.०२९३८६४	६.६१९१०६

वर्ग. घन, आणि मूळ.

संख्या	वर्ग	घन	वर्गमूळ.	घनमूळ.
२९१	८४६८१	२४६४२१७१	१७·०५८७२२१	६·६२६७०५
२९२	८५२६४	२४८९७०८८	१७·०८८००७५	६·६३४२८७
२९३	८५८४९	२५१५३७५७	१७·११७२४२८	६·६४१८५२
२९४	८६४३६	२५४१२१८४	१७·१४६४२८२	६·६४९३९९
२९५	८७०२५	२५६७२३७५	१७·१७५५६४०	६·६५६९३०
२९६	८७६१६	२५९३४३३६	१७·२०४६५०५	६·६६४४४४
२९७	८८२०९	२६१९८०७३	१७·२३३६८७९	६·६७१९४०
२९८	८८८०४	२६४६३५९२	१७·२६२६७६५	६·६७९४२०
२९९	८९४०१	२६७३०८९९	१७·२९१६१६५	६·६८६८८३
३००	९००००	२७००००००	१७·३२०५०८१	६·६९४३३०
३०१	९०६०१	२७२७०९०१	१७·३४९३५१६	६·७०१७५८
३०२	९१२०४	२७५४३६०८	१७·३७८१४७२	६·७०९१७२
३०३	९१८०९	२७८१८१२७	१७·४०६८९५२	६·७१६५७०
३०४	९२४१६	२८०९४४६४	१७·४३५५९५८	६·७२३९५१
३०५	९३०२५	२८३७२६२५	१७·४६४२४९२	६·७३१३१६
३०६	९३६३६	२८६५२६१६	१७·४९२८५५७	६·७३८६६५
३०७	९४२४९	२८९३४४४३	१७·५२१४१५५	६·७४५९९७
३०८	९४८६४	२९२१८११२	१७·५४९९२८८	६·७५३३१३
३०९	९५४८१	२९५०३६२९	१७·५७८३९५८	६·७६०६१४
३१०	९६१००	२९७९१०००	१७·६०६८१६९	६·७६७८९९
३११	९६७२१	३००८०२३१	१७·६३५१९२१	६·७७५१६९
३१२	९७३४४	३०३७१३२८	१७·६६३५२१७	६·७८२४२३
३१३	९७९६९	३०६६४२९७	१७·६९१८०६०	६·७८९६६१
३१४	९८५९६	३०९५९१४४	१७·७२००४५१	६·७९६८८४
३१५	९९२२५	३१२५५८७५	१७·७४८२३९३	६·८०४०९२
३१६	९९८५६	३१५५४४९६	१७·७७६३८८८	६·८११२८५
३१७	१००४८९	३१८५५०१३	१७·८०४४९३८	६·८१८४६२
३१८	१०११२४	३२१५७४३२	१७·८३२५५४५	६·८२५६२४
३१९	१०१७६१	३२४६१७५९	१७·८६०५७११	६·८३२७७१
३२०	१०२४००	३२७६८०००	१७·८८८५४३८	६·८३९९०४

वर्ग, घन, आणिमूळ.

संख्या.	वर्ग.	घन.	वर्गमूळ.	घनमूळ.
३२१	१०३०४१	३३०७६१६१	१७.९१६४७२९	६.८४७०२१
३२२	१०३६८४	३३३८६२४८	१७.९४४३५८४	६.८५४१२४
३२३	१०४३२९	३३६९८२६७	१७.९७२२००८	६.८६१२१२
३२४	१०४९७६	३४०१२२२४	१८.०००००००	६.८६८२८५
३२५	१०५६२५	३४३२८१२५	१८.०२७७५६४	६.८७५३४४
३२६	१०६२७६	३४६४५९७६	१८.०५५४७०१	६.८८२३८९
३२७	१०६९२९	३४९६५७८३	१८.०८३१४१३	६.८८९४१९
३२८	१०७५८४	३५२८७५५२	१८.११०७७०३	६.८९६४३५
३२९	१०८२४१	३५६११२८९	१८.१३८३५७१	६.९०३४३६
३३०	१०८९००	३५९३७०००	१८.१६५९०२१	६.९१०४२३
३३१	१०९५६१	३६२६४६९१	१८.१९३४०५४	६.९१७३९६
३३२	११०२२४	३६५९४३६८	१८.२२०८६७२	६.९२४३५५
३३३	११०८८९	३६९२६०३७	१८.२४८२८७६	६.९३१३००
३३४	१११५५६	३७२५९७०४	१८.२७५६६६९	६.९३८२३२
३३५	११२२२५	३७५९५३७५	१८.३०३००५२	६.९४५१४९
३३६	११२८९६	३७९३३०५६	१८.३३०३०२८	६.९५२०५३
३३७	११३५६९	३८२७२७५३	१८.३५७५५९८	६.९५८९४३
३३८	११४२४४	३८६१४४७२	१८.३८४७७६३	६.९६५८१९
३३९	११४९२१	३८९५८२१९	१८.४११९५२६	६.९७२६८३
३४०	११५६००	३९३०४०००	१८.४३९०८८९	६.९७९५३२
३४१	११६२८१	३९६५१८२१	१८.४६६१८५३	६.९८६३६८
३४२	११६९६४	४०००१६८८	१८.४९३२४२०	६.९९३१९१
३४३	११७६४९	४०३५३६०७	१८.५२०२५९२	७.००००००
३४४	११८३३६	४०७०७५८४	१८.५४७२३७०	७.००६७९६
३४५	११९०२५	४१०६३६२५	१८.५७४१७५६	७.०१३५७९
३४६	११९७१६	४१४२१७३६	१८.६०१०७५२	७.०२०३४९
३४७	१२०४०९	४१७८१९२३	१८.६२७९३६०	७.०२७१०६
३४८	१२११०४	४२१४४१९२	१८.६५४७५८१	७.०३३८५०
३४९	१२.१८०१	४२५०८५४९	१८.६८१५४१७	७.०४०५८१
३५०	१२२५००	४२८७५०००	१८.७०८२८६९	७.०४७२९८

वर्ग, घन, आणि मूळ.

संख्या	वर्ग,	घन,	वर्गमूळ	घनमूळ.
३५१	१२३२०१	४३२४३५५१	१८·७३४९९४०	७·०५४००४
३५२	१२३९०४	४३६१४२०८	१८·७६१६६३०	७·०६०६९७
३५३	१२४६०९	४३९८६९७७	१८·७८८२९४२	७·०६७३७७
३५४	१२५३१६	४४३६१८६४	१८·८१४८८७७	७·०७४०४४
३५५	१२६०२५	४४७३८८७५	१८·८४१४४३७	७·०८०६९९
३५६	१२६७३६	४५११८०१६	१८·८६७९६२३	७·०८७३४१
३५७	१२७४४९	४५४९९२९३	१८·८९४४४३६	७·०९३९७१
३५८	१२८१६४	४५८८२७१२	१८·९२०८८७९	७·१००५८८
३५९	१२८८८१	४६२६८२७९	१८·९४७२९५३	७·१०७१९४
३६०	१२९६००	४६६५६०००	१८·९७३६६६०	७·११३७८७
३६१	१३०३२१	४७०४५८८१	१९·०००००००	७·१२०३६७
३६२	१३१०४४	४७४३७९२८	१९·०२६२९७६	७·१२६९३६
३६३	१३१७६९	४७८३२१४७	१९·०५२५५८९	७·१३३४९३
३६४	१३२४९६	४८२२८५४४	१९·०७८७८४०	७·१४००३७
३६५	१३३२२५	४८६२७१२५	१९·१०४९७३२	७·१४६५७०
३६६	१३३९५६	४९०२७८९६	१९·१३११२६५	७·१५३०९०
३६७	१३४६८९	४९४३०८६३	१९·१५७२४४१	७·१५९५९९
३६८	१३५४२४	४९८३६०३२	१९·१८३३२६१	७·१६६०९६
३६९	१३६१६१	५०२४३४०९	१९·२०९३७२७	७·१७२५८१
३७०	१३६९००	५०६५३०००	१९·२३५३८४१	७·१७९०५४
३७१	१३७६४१	५१०६४८११	१९·२६१३६०३	७·१८५५१६
३७२	१३८३८४	५१४७८८४८	१९·२८७३०१५	७·१९१९६६
३७३	१३९१२९	५१८९५११७	१९·३१३२०७९	७·१९८४०५
३७४	१३९८७६	५२३१३६२४	१९·३३९०७९६	७·२०४८३२
३७५	१४०६२५	५२७३४३७५	१९·३६४९१६७	७·२११२४८
३७६	१४१३७६	५३१५७३७६	१९·३९०७१९४	७·२१७६५२
३७७	१४२१२९	५३५८२६३३	१९·४१६४८७८	७·२२४०४५
३७८	१४२८८४	५४०१०१५२	१९·४४२२२२१	७·२३०४२७
३७९	१४३६४१	५४४३९९३९	१९·४६७९२२३	७·२३६७९७
३८०	१४४४००	५४८७२०००	१९·४९३५८८७	७·२४३१५६

वर्ग. घन. आणिमूळ.

संख्या	वर्ग	घन	वर्गमूळ.	घनमूळ.
३८१	१४५१६१	५५३०६३४१	१९·५१९२२१२	७·२४९५०४
३८२	१४५९२४	५५७४२९६८	१९·५४४८२०३	७·२५५८४१
३८३	१४६६८९	५६१८१८८७	१९·५७०३८५८	७·२६२१६७
३८४	१४७४५६	५६६२३१०४	१९·५९५९१७९	७·२६८४८२
३८५	१४८२२५	५७०६६६२५	१९·६२१४१६९	७·२७४७८६
३८६	१४८९९६	५७५१२४५६	१९·६४६८८२७	७·२८१०७९
३८७	१४९७६९	५७९६०६०३	१९·६७२३१५६	७·२८७३६२
३८८	१५०५४४	५८४११०७२	१९·६९७७१५६	७·२९३६३३
३८९	१५१३२१	५८८६३८६९	१९·७२३०८२९	७·२९९८९४
३९०	१५२१००	५९३१९०००	१९·७४८४१७७	७·३०६१४३
३९१	१५२८८१	५९७७६४७१	१९·७७३७१९९	७·३१२३८२
३९२	१५३६६४	६०२३६२८८	१९·७९८९८९९	७·३१८६११
३९३	१५४४४९	६०६९८४५७	१९·८२४२२७६	७·३२४८२९
३९४	१५५२३६	६११६२९८४	१९·८४९४३३२	७·३३१०३७
३९५	१५६०२५	६१६२९८७५	१९·८७४६०६९	७·३३७२३४
३९६	१५६८१६	६२०९९१३६	१९·८९९७४८७	७·३४३४२१
३९७	१५७६०९	६२५७०७७३	१९·९२४८५८८	७·३४९५९७
३९८	१५८४०४	६३०४४७९२	१९·९४९९३७३	७·३५५७६२
३९९	१५९२०१	६३५२११९९	१९·९७४९८४४	७·३६१९१८
४००	१६००००	६४००००००	२०·०००००००	७·३६८०६३
४०१	१६०८०१	६४४८१२०१	२०·०२४९८४४	७·३७४१९८
४०२	१६१६०४	६४९६४८०८	२०·०४९९३७७	७·३८०३२२
४०३	१६२४०९	६५४५०८२७	२०·०७४८५९९	७·३८६४३७
४०४	१६३२१६	६५९३९२६४	२०·०९९७५१२	७·३९२५४२
४०५	१६४०२५	६६४३०१२५	२०·१२४६११८	७·३९८६३६
४०६	१६४८३६	६६९२३४१६	२०·१४९४४१७	७·४०४७२०
४०७	१६५६४९	६७४१९१४३	२०·१७४२४१०	७·४१०७९५
४०८	१६६४६४	६७९१७३१२	२०·१९९००९९	७·४१६८५९
४०९	१६७२८१	६८४१७९२९	२०·२२३७४८४	७·४२२९१४
४१०	१६८१००	६८९२१०००	२०·२४८४५६६	७·४२८९५९

वर्ग, घन, आणि मूळ.

संख्या.	वर्ग.	घन.	वर्गमूळ	घनमूळ.
४११	१६८९२१	६९४२६५३१	२०.२७३१३४९	७.४३४९९४
४१२	१६९७४४	६९९३४५२८	२०.२९७७८३१	७.४४१०१९
४१३	१७०५६९	७०४४४९९७	२०.३२२४०१४	७.४४७०३४
४१४	१७१३९६	७०९५७९४४	२०.३४६९८९९	७.४५३०४०
४१५	१७२२२५	७१४७३३७५	२०.३७१५४८८	७.४५९०३६
४१६	१७३०५६	७१९९१२९६	२०.३९६०७८१	७.४६५०२२
४१७	१७३८८९	७२५११७१३	२०.४२०५७७९	७.४७०९९९
४१८	१७४७२४	७३०३४६३२	२०.४४५०४८३	७.४७६९६६
४१९	१७५५६१	७३५६००५९	२०.४६९४८९५	७.४८२९२४
४२०	१७६४००	७४०८८०००	२०.४९३९०१५	७.४८८८७२
४२१	१७७२४१	७४६१८४६१	२०.५१८२८४५	७.४९४८११
४२२	१७८०८४	७५१५१४४८	२०.५४२६३८६	७.५००७४१
४२३	१७८९२९	७५६८६९६७	२०.५६६९६३८	७.५०६६६१
४२४	१७९७७६	७६२२५०२४	२०.५९१२६०३	७.५१२५७१
४२५	१८०६२५	७६७६५६२५	२०.६१५५२८१	७.५१८४७३
४२६	१८१४७६	७७३०८७७६	२०.६३९७६७४	७.५२४३६५
४२७	१८२३२९	७७८५४४८३	२०.६६३९७८३	७.५३०२४८
४२८	१८३१८४	७८४०२७५२	२०.६८८१६०९	७.५३६१२१
४२९	१८४०४१	७८९५३५८९	२०.७१२३१५२	७.५४१९८६
४३०	१८४९००	७९५०७०००	२०.७३६४४१४	७.५४७८४२
४३१	१८५७६१	८००६२९९१	२०.७६०५३९५	७.५५३६८८
४३२	१८६६२४	८०६२१५६८	२०.७८४६०९७	७.५५९५२६
४३३	१८७४८९	८११८२७३७	२०.८०८६५२०	७.५६५३५५
४३४	१८८३५६	८१७४६५०४	२०.८३२६६६७	७.५७११७४
४३५	१८९२२५	८२३१२८७५	२०.८५६६५३६	७.५७६९८५
४३६	१९००९६	८२८८१८५६	२०.८८०६१३०	७.५८२७८६
४३७	१९०९६९	८३४५३४५३	२०.९०४५४५०	७.५८८५७९
४३८	१९१८४४	८४०२७६७२	२०.९२८४४९५	७.५९४३६३
४३९	१९२७२१	८४६०४५१९	२०.९५२३२६८	७.६००१३८
४४०	१९३६००	८५१८४०००	२०.९७६१७७०	७.६०५९०५

वर्ग. घन. आणि मूळ.

संख्या	वर्ग.	घन.	वर्गमूळ	घनमूळ
४४१	१९४४८१	८५७६६१२१	२१·०००००००	७·६११६६३
४४२	१९५३६४	८६३५०८८८	२१·०२३७९६०	७·६१७४१२
४४३	१९६२४९	८६९३८३०७	२१·०४७५६५२	७·६२३१५२
४४४	१९७१३६	८७५२८३८४	२१·०७१३०७५	७·६२८८८४
४४५	१९८०२५	८८१२११२५	२१·०९५०२३१	७·६३४६०७
४४६	१९८९१६	८८७१६५३६	२१·११८७१२१	७·६४०३२१
४४७	१९९८०९	८९३१४६२३	२१·१४२३७४५	७·६४६०२७
४४८	२००७०४	८९९१५३९२	२१·१६६०१०५	७·६५१७२५
४४९	२०१६०१	९०५१८८४९	२१·१८९६२०१	७·६५७४१४
४५०	२०२५००	९११२५०००	२१·२१३२०३४	७·६६३०९४
४५१	२०३४०१	९१७३३८५१	२१·२३६७६०६	७·६६८७६६
४५२	२०४३०४	९२३४५४०८	२१·२६०२९१६	७·६७४४३०
४५३	२०५२०९	९२९५९६७७	२१·२८३७९६७	७·६८००८६
४५४	२०६११६	९३५७६६६४	२१·३०७२७५८	७·६८५७३३
४५५	२०७०२५	९४१९६३७५	२१·३३०७२९०	७·६९१३७२
४५६	२०७९३६	९४८१८८१६	२१·३५४१५६५	७·६९७००२
४५७	२०८८४९	९५४४३९९३	२१·३७७५५८३	७·७०२६२५
४५८	२०९७६४	९६०७१९१२	२१·४००९३४६	७·७०८२३९
४५९	२१०६८१	९६७०२५७९	२१·४२४२८५३	७·७१३८४४
४६०	२११६००	९७३३६०००	२१·४४७६१०६	७·७१९४४२
४६१	२१२५२१	९७९७२१८१	२१·४७०९१०६	७·७२५०३२
४६२	२१३४४४	९८६१११२८	२१·४९४१८५३	७·७३०६१४
४६३	२१४३६९	९९२५२८४७	२१·५१७४३४८	७·७३६१८८
४६४	२१५२९६	९९८९७३४४	२१·५४०६५९२	७·७४१७५३
४६५	२१६२२५	१००५४४६२५	२१·५६३८५८७	७·७४७३११
४६६	२१७१५६	१०११९४६९६	२१·५८७०३३१	७·७५२८६१
४६७	२१८०८९	१०१८४७५६३	२१·६१०१८२८	७·७५८४०२
४६८	२१९०२४	१०२५०३२३२	२१·६३३३०७७	७·७६३९३६
४६९	२१९९६१	१०३१६१७०९	२१·६५६४०७८	७·७६९४६२
४७०	२२०९००	१०३८२३०००	२१·६७९४८३४	७·७७४९८०

वर्ग, घन, आणि मूळ.

संख्या	वर्ग.	घन	वर्गमूळ	घनमूळ
७७१	५९४४४१	४५८३१४०११	२७.७६६८८६८	९.१६९६२२६
७७२	५९५९८४	४६००९९६४८	२७.७८४८८८०	९.१७३५८५२
७७३	५९७५२९	४६१८८९९१७	२७.८०२८७७५	९.१७७५४४५
७७४	५९९०७६	४६३६८४८२४	२७.८२०८५५५	९.१८१५००३
७७५	६००६२५	४६५४८४३७५	२७.८३८८२१८	९.१८५४५२८
७७६	६०२१७६	४६७२८८५७६	२७.८५६७७६६	९.१८९४०१८
७७७	६०३७२९	४६९०९७४३३	२७.८७४७१९७	९.१९३३४७४
७७८	६०५२८४	४७०९१०९५२	२७.८९२६५१४	९.१९७२८९७
७७९	६०६८४१	४७२७२९१३९	२७.९१०५७१५	९.२०१२२८६
७८०	६०८४००	४७४५५२०००	२७.९२८४८०१	९.२०५१६४१
७८१	६०९९६१	४७६३७९५४१	२७.९४६३७७२	९.२०९०९६२
७८२	६११५२४	४७८२११७६८	२७.९६४२६२९	९.२१३०२५०
७८३	६१३०८९	४८००४८६८७	२७.९८२१३७२	९.२१६९५०५
७८४	६१४६५६	४८१८९०३०४	२८.०००००००	९.२२०८७२६
७८५	६१६२२५	४८३७३६६२५	२८.०१७८५१५	९.२२४७९१४
७८६	६१७७९६	४८५५८७६५६	२८.०३५६९१५	९.२२८७०६८
७८७	६१९३६९	४८७४४३४०३	२८.०५३५२०३	९.२३२६१८९
७८८	६२०९४४	४८९३०३८७२	२८.०७१३३७७	९.२३६५२७७
७८९	६२२५२१	४९११६९०६९	२८.०८९१४३८	९.२४०४३३३
७९०	६२४१००	४९३०३९०००	२८.१०६९३८६	९.२४४३३५५
७९१	६२५६८१	४९४९१३६७१	२८.१२४७२२२	९.२४८२३४४
७९२	६२७२६४	४९६७९३०८८	२८.१४२४९४६	९.२५२१३००
७९३	६२८८४९	४९८६७७२५७	२८.१६०२५५७	९.२५६०२२४
७९४	६३०४३६	५००५६६१८४	२८.१७८००५६	९.२५९९११५
७९५	६३२०२५	५०२४५९८७५	२८.१९५७४४४	९.२६३७९७३
७९६	६३३६१६	५०४३५८३३६	२८.२१३४७२०	९.२६७६७९८
७९७	६३५२०९	५०६२६१५७३	२८.२३११८८४	९.२७१५५९२
७९८	६३६८०४	५०८१६९५९२	२८.२४८८९३८	९.२७५४३५२
७९९	६३८४०१	५१००८२३९९	२८.२६६५८८१	९.२७९३०८१
८००	६४००००	५१२००००००	२८.२८४२७१२	९.२८३१७७७

वर्ग, घन, आणि मूळ.

संख्या.	वर्ग.	घन.	वर्गमूळ.	घनमूळ.
५०१	२५१००१	१२५७५१५०१	२२·३८३०२९३	७·९४२२९३
५०२	२५२००४	१२६५०६००८	२२·४०५३५६५	७·९४७५७४
५०३	२५३००९	१२७२६३५२७	२२·४२७६६१५	७·९५२८४८
५०४	२५४०१६	१२८०२४०६४	२२·४४९९४४३	७·९५८११४
५०५	२५५०२५	१२८७८७६२५	२२·४७२२०५१	७·९६३३७४
५०६	२५६०३६	१२९५५४२१६	२२·४९४४४३८	७·९६८६२७
५०७	२५७०४९	१३०३२३८४३	२२·५१६६६०५	७·९७३८७३
५०८	२५८०६४	१३१०९६५१२	२२·५३८८५५३	७·९७९११२
५०९	२५९०८१	१३१८७२२२९	२२·५६१०२८३	७·९८४३४४
५१०	२६०१००	१३२६५१०००	२२·५८३१७९६	७·९८९५७०
५११	२६११२१	१३३४३२८३१	२२·६०५३०९१	७·९९४७८८
५१२	२६२१४४	१३४२१७७२८	२२·६२७४१७०	८·००००००
५१३	२६३१६९	१३५००५६९७	२२·६४९५०३३	८·००५२०५
५१४	२६४१९६	१३५७९६७४४	२२·६७१५६८१	८·०१०४०३
५१५	२६५२२५	१३६५९०८७५	२२·६९३६११४	८·०१५५९५
५१६	२६६२५६	१३७३८८०९६	२२·७१५६३३४	८·०२०७७९
५१७	२६७२८९	१३८१८८४१३	२२·७३७६३४०	८·०२५९५७
५१८	२६८३२४	१३८९९१८३२	२२·७५९६१३४	८·०३११२९
५१९	२६९३६१	१३९७९८३५९	२२·७८१५७१५	८·०३६२९३
५२०	२७०४००	१४०६०८०००	२२·८०३५०८५	८·०४१४५२
५२१	२७१४४१	१४१४२०७६१	२२·८२५४२४४	८·०४६६०३
५२२	२७२४८४	१४२२३६६४८	२२·८४७३१९३	८·०५१७४८
५२३	२७३५२९	१४३०५५६६७	२२·८६९१९३३	८·०५६८८६
५२४	२७४५७६	१४३८७७८२४	२२·८९१०४६३	८·०६२०१८
५२५	२७५६२५	१४४७०३१२५	२२·९१२८७८५	८·०६७१४३
५२६	२७६६७६	१४५५३१५७६	२२·९३४६८९९	८·०७२२६२
५२७	२७७७२९	१४६३६३१८३	२२·९५६४८०६	८·०७७३७४
५२८	२७८७८४	१४७१९७९५२	२२·९७८२५०६	८·०८२४८०
५२९	२७९८४१	१४८०३५८८९	२३·०००००००	८·०८७५७९
५३०	२८०९००	१४८८७७०००	२३·०२१७२८९	८·०९२६७२

वर्ग, घन, आणि मूळ.

संख्या	वर्ग.	घन.	वर्गमूळ.	घनमूळ.
५३१	२८१९६१	१४९७२१२९१	२३.०४३४३७२	८.०९७७५९
५३२	२८३०२४	१५०५६८७६८	२३.०६५१२५२	८.१०२८३९
५३३	२८४०८९	१५१४१९४३७	२३.०८६७९२८	८.१०७९१३
५३४	२८५१५६	१५२२७३३०४	२३.१०८४४००	८.११२९८०
५३५	२८६२२५	१५३१३०३७५	२३.१३००६७०	८.११८०४१
५३६	२८७२९६	१५३९९०६५६	२३.१५१६७३८	८.१२३०९९
५३७	२८८३६९	१५४८५४१५३	२३.१७३२६०५	८.१२८१४५
५३८	२८९४४४	१५५७२०८७२	२३.१९४८२७०	८.१३३१८७
५३९	२९०५२१	१५६५९०८१९	२३.२१६३७३५	८.१३८२२३
५४०	२९१६००	१५७४६४०००	२३.२३७९००१	८.१४३२५३
५४१	२९२६८१	१५८३४०४२१	२३.२५९४०६७	८.१४८२७६
५४२	२९३७६४	१५९२२००८८	२३.२८०८९३५	८.१५३२९४
५४३	२९४८४९	१६०१०३००७	२३.३०२३६०४	८.१५८३०५
५४४	२९५९३६	१६०९८९१८४	२३.३२३८०७६	८.१६३३१०
५४५	२९७०२५	१६१८७८६२५	२३.३४५२३५१	८.१६८३०९
५४६	२९८११६	१६२७७१३३६	२३.३६६६४२९	८.१७३३०२
५४७	२९९२०९	१६३६६७३२३	२३.३८८०३११	८.१७८२८९
५४८	३००३०४	१६४५६६५९२	२३.४०९३९९८	८.१८३२६९
५४९	३०१४०१	१६५४६९१४९	२३.४३०७४९०	८.१८८२४४
५५०	३०२५००	१६६३७५०००	२३.४५२०७८८	८.१९३२१३
५५१	३०३६०१	१६७२८४१५१	२३.४७३३८९२	८.१९८१७५
५५२	३०४७०४	१६८१९६६०८	२३.४९४६८०२	८.२०३१३२
५५३	३०५८०९	१६९११२३७७	२३.५१५९५२०	८.२०८०८२
५५४	३०६९१६	१७००३१४६४	२३.५३७२०४६	८.२१३०२७
५५५	३०८०२५	१७०९५३८७५	२३.५५८४३८०	८.२१७९६६
५५६	३०९१३६	१७१८७९६१६	२३.५७९६५२२	८.२२२८९९
५५७	३१०२४९	१७२८०८६९३	२३.६००८४७४	८.२२७८२६
५५८	३११३६४	१७३७४१११२	२३.६२२०२३६	८.२३२७४८
५५९	३१२४८१	१७४६७६८७९	२३.६४३१८०८	८.२३७६६४
५६०	३१३६००	१७५६१६०००	२३.६६४३१९१	८.२४२५७४

वर्ग, घन, आणि मूळे

संख्या	वर्ग	घन	वर्गमूळ	घनमूळ
५६१	३१४७२१	१७६५५८४८१	२३·६८५४३८६	८·२४७४७४०
५६२	३१५८४४	१७७५०४३२८	२३·७०६५३९२	८·२५२३७१५
५६३	३१६९६९	१७८४५३५४७	२३·७२७६२१०	८·२५७२६३३
५६४	३१८०९६	१७९४०६१४४	२३·७४८६८४२	८·२६२१४९२
५६५	३१९२२५	१८०३६२१२५	२३·७६९७२८६	८·२६७०२९४
५६६	३२०३५६	१८१३२१४९६	२३·७९०७५४५	८·२७१९०३९
५६७	३२१४८९	१८२२८४२६३	२३·८११७६१८	८·२७६७७२५
५६८	३२२६२४	१८३२५०४३२	२३·८३२७५०६	८·२८१६३५५
५६९	३२३७६१	१८४२२०००९	२३·८५३७२०९	८·२८६४९२७
५७०	३२४९००	१८५१९३०००	२३·८७४६७२८	८·२९१३४४४
५७१	३२६०४१	१८६१६९४११	२३·८९५६०६३	८·२९६१९०३
५७२	३२७१८४	१८७१४९२४८	२३·९१६५२१५	८·३०१०३०५
५७३	३२८३२९	१८८१३२५१७	२३·९३७४१८४	८·३०५८६५१
५७४	३२९४७६	१८९११९२२४	२३·९५८२९७१	८·३१०६९४१
५७५	३३०६२५	१९०१०९३७५	२३·९७९१५७६	८·३१५५१७५
५७६	३३१७७६	१९११०२९७६	२४·०००००००	८·३२०३३५३
५७७	३३२९२९	१९२१०००३३	२४·०२०८२४३	८·३२५१४७५
५७८	३३४०८४	१९३१००५५२	२४·०४१६३०६	८·३२९९५४२
५७९	३३५२४१	१९४१०४५३९	२४·०६२४१८८	८·३३४७५५३
५८०	३३६४००	१९५११२०००	२४·०८३१८९२	८·३३९५५०९
५८१	३३७५६१	१९६१२२९४१	२४·१०३९४१६	८·३४४३४१०
५८२	३३८७२४	१९७१३७३६८	२४·१२४६७६२	८·३४९१२५६
५८३	३३९८८९	१९८१५५२८७	२४·१४५३९२९	८·३५३९०४८
५८४	३४१०५६	१९९१७६७०४	२४·१६६०९१९	८·३५८६७८४
५८५	३४२२२५	२००२०१६२५	२४·१८६७७३२	८·३६३४४६६
५८६	३४३३९६	२०१२३००५६	२४·२०७४३६९	८·३६८२०९४
५८७	३४४५६९	२०२२६२००३	२४·२२८०८२९	८·३७२९६६७
५८८	३४५७४४	२०३२९७४७२	२४·२४८७११३	८·३७७७१८७
५८९	३४६९२१	२०४३३६४६९	२४·२६९३२२२	८·३८२४६५३
५९०	३४८१००	२०५३७९०००	२४·२८९९१५६	८·३८७२०६६

वर्ग, घन, आणि मूळ.

संख्या	वर्ग.	घन.	वर्गमूळ.	घनमूळ.
५९१	३४९२८१	२०६४२५०७१	२४·३१०४९१६	८·३९१९४२
५९२	३५०४६४	२०७४७४६८८	२४·३३१०५०१	८·३९६६७८
५९३	३५१६४९	२०८५२७८५७	२४·३५१५९१३	८·४०१३९८
५९४	३५२८३६	२०९५८४५८४	२४·३७२११५२	८·४०६११९
५९५	३५४०२५	२१०६४४८७५	२४·३९२६२१८	८·४१०८३३
५९६	३५५२१६	२११७०८७३६	२४·४१३१११२	८·४१५५४२
५९७	३५६४०९	२१२७७६१७३	२४·४३३५८३४	८·४२०२४६
५९८	३५७६०४	२१३८४७१९२	२४·४५४०३८५	८·४२४९४४
५९९	३५८८०१	२१४९२१७९९	२४·४७४४७६५	८·४२९६३८
६००	३६००००	२१६००००००	२४·४९४८९७४	८·४३४३२७
६०१	३६१२०१	२१७०८१८०१	२४·५१५३०१३	८·४३९०१०
६०२	३६२४०४	२१८१६७२०८	२४·५३५६८८३	८·४४३६८८
६०३	३६३६०९	२१९२५६२२७	२४·५५६०५८३	८·४४८३६०
६०४	३६४८१६	२२०३४८८६४	२४·५७६४११५	८·४५३०२८
६०५	३६६०२५	२२१४४५१२५	२४·५९६७४७८	८·४५७६९१
६०६	३६७२३६	२२२५४५०१६	२४·६१७०६७३	८·४६२३४८
६०७	३६८४४९	२२३६४८५४३	२४·६३७३७००	८·४६७०००
६०८	३६९६६४	२२४७५५७१२	२४·६५७६५६०	८·४७१६४७
६०९	३७०८८१	२२५८६६५२९	२४·६७७९२५४	८·४७६२८९
६१०	३७२१००	२२६९८१०००	२४·६९८१७८१	८·४८०९२६
६११	३७३३२१	२२८०९९१३१	२४·७१८४१४२	८·४८५५५८
६१२	३७४५४४	२२९२२०९२८	२४·७३८६३३८	८·४९०१८५
६१३	३७५७६९	२३०३४६३९७	२४·७५८८३६८	८·४९४८०६
६१४	३७६९९६	२३१४७५५४४	२४·७७९०२३४	८·४९९४२३
६१५	३७८२२५	२३२६०८३७५	२४·७९९१९३५	८·५०४०३५
६१६	३७९४५६	२३३७४४८९६	२४·८१९३४७३	८·५०८६४२
६१७	३८०६८९	२३४८८५११३	२४·८३९४८४७	८·५१३२४३
६१८	३८१९२४	२३६०२९०३२	२४·८५९६०५८	८·५१७८४०
६१९	३८३१६१	२३७१७६६५९	२४·८७९७१०६	८·५२२४३२
६२०	३८४४००	२३८३२८०००	२४·८९९७९९२	८·५२७०१९

वर्ग, घन, आणि मूळ.

संख्या	वर्ग	घन.	वर्गमूळ	घनमूळ.
६२१	३८५६४१	२३९४८३०६१	२४·९१९८७१६	८·५३१६०१
६२२	३८६८८४	२४०६४१८४८	२४·९३९९२७८	८·५३६१७८
६२३	३८८१२९	२४१८०४३६७	२४·९५९९६७९	८·५४०७५०
६२४	३८९३७६	२४२९७०६२४	२४·९७९९९२०	८·५४५३१७
६२५	३९०६२५	२४४१४०६२५	२५·०००००००	८·५४९८८०
६२६	३९१८७६	२४५३१४३७६	२५·०१९९९२०	८·५५४४३७
६२७	३९३१२९	२४६४९१८८३	२५·०३९९६८१	८·५५८९९०
६२८	३९४३८४	२४७६७३१५२	२५·०५९९२८२	८·५६३५३८
६२९	३९५६४१	२४८८५८१८९	२५·०७९८७२४	८·५६८०८१
६३०	३९६९००	२५००४७०००	२५·०९९८००८	८·५७२६१९
६३१	३९८१६१	२५१२३९५९१	२५·११९७१३४	८·५७७१५२
६३२	३९९४२४	२५२४३५९६८	२५·१३९६१०२	८·५८१६८१
६३३	४००६८९	२५३६३६१३७	२५·१५९४९१३	८·५८६२०५
६३४	४०१९५६	२५४८४०१०४	२५·१७९३५६६	८·५९०७२४
६३५	४०३२२५	२५६०४७८७५	२५·१९९२०६३	८·५९५२३८
६३६	४०४४९६	२५७२५९४५६	२५·२१९०४०४	८·५९९७४७
६३७	४०५७६९	२५८४७४८५३	२५·२३८८५८९	८·६०४२५२
६३८	४०७०४४	२५९६९४०७२	२५·२५८६६१९	८·६०८७५३
६३९	४०८३२१	२६०९१७११९	२५·२७८४४९३	८·६१३२४८
६४०	४०९६००	२६२१४४०००	२५·२९८२२१३	८·६१७७३९
६४१	४१०८८१	२६३३७४७२१	२५·३१७९७७८	८·६२२२२५
६४२	४१२१६४	२६४६०९२८८	२५·३३७७१८९	८·६२६७०६
६४३	४१३४४९	२६५८४७७०७	२५·३५७४४४७	८·६३११८३
६४४	४१४७३६	२६७०८९९८४	२५·३७७१५५१	८·६३५६५५
६४५	४१६०२५	२६८३३६१२५	२५·३९६८५०२	८·६४०१२३
६४६	४१७३१६	२६९५८६१३६	२५·४१६५३०१	८·६४४५८५
६४७	४१८६०९	२७०८४००२३	२५·४३६१९४७	८·६४९०४४
६४८	४१९९०४	२७२०९७७९२	२५·४५५८४४१	८·६५३४९७
६४९	४२१२०१	२७३३५९४४९	२५·४७५४७८४	८·६५७९४६
६५०	४२२५००	२७४६२५०००	२५·४९५०९७६	८·६६२३९१

वर्ग, घन, आणि मूळ.

संख्या.	वर्ग.	घन.	वर्गमूळ	घनमूळ
६५१	४२३८०१	२७५८९४४५१	२५· ५१४७०१६	८· ६६६८३१
६५२	४२५१०४	२७७१६७८०८	२५· ५३४२९०७	८· ६७१२६६
६५३	४२६४०९	२७८४४५०७७	२५· ५५३८६४७	८· ६७५६९७
६५४	४२७७१६	२७९७२६२६४	२५· ५७३४२३७	८· ६८०१२४
६५५	४२९०२५	२८१०११३७५	२५· ५९२९६७८	८· ६८४५४६
६५६	४३०३३६	२८२३००४१६	२५· ६१२४९६९	८· ६८८९६३
६५७	४३१६४९	२८३५९३३९३	२५· ६३२०११२	८· ६९३३७६
६५८	४३२९६४	२८४८९०३१२	२५· ६५१५१०७	८· ६९७७८४
६५९	४३४२८१	२८६१९११७९	२५· ६७०९९५३	८· ७०२१८८
६६०	४३५६००	२८७४९६०००	२५· ६९०४६५२	८· ७०६५८८
६६१	४३६९२१	२८८८०४७८१	२५· ७०९९२०३	८· ७१०९८३
६६२	४३८२४४	२९०११७५२८	२५· ७२९३६०७	८· ७१५३७३
६६३	४३९५६९	२९१४३४२४७	२५· ७४८७८६४	८· ७१९७६०
६६४	४४०८९६	२९२७५४९४४	२५· ७६८१९७५	८· ७२४१४१
६६५	४४२२२५	२९४०७९६२५	२५· ७८७५९३९	८· ७२८५१८
६६६	४४३५५६	२९५४०८२९६	२५· ८०६९७५८	८· ७३२८९२
६६७	४४४८८९	२९६७४०९६३	२५· ८२६३४३१	८· ७३७२६०
६६८	४४६२२४	२९८०७७६३२	२५· ८४५६९६०	८· ७४१६२४
६६९	४४७५६१	२९९४१८३०९	२५· ८६५०३४३	८· ७४५९८५
६७०	४४८९००	३००७६३०००	२५· ८८४३५८२	८· ७५०३४०
६७१	४५०२४१	३०२१११७११	२५· ९०३६६७७	८· ७५४६९१
६७२	४५१५८४	३०३४६४४४८	२५· ९२२९६२८	८· ७५९०३८
६७३	४५२९२९	३०४८२१२१७	२५· ९४२२४३५	८· ७६३३८१
६७४	४५४२७६	३०६१८२०२४	२५· ९६१५१००	८· ७६७७१९
६७५	४५५६२५	३०७५४६८७५	२५· ९८०७६२१	८· ७७२०५३
६७६	४५६९७६	३०८९१५७७६	२६· ०००००००	८· ७७६३८३
६७७	४५८३२९	३१०२८८७३३	२६· ०१९२२३७	८· ७८०७०८
६७८	४५९६८४	३११६६५७५२	२६· ०३८४३३१	८· ७८५०२९
६७९	४६१०४१	३१३०४६८३९	२६· ०५७६२८४	८· ७८९३४६
६८०	४६२४००	३१४४३२०००	२६· ०७६८०९६	८· ७९३६५९

वर्ग,घन, आणि मूळ.

संख्या.	वर्ग.	घन.	वर्गमूळ	घनमूळ.
६८१	४६३७६१	३१५८२१२४१	२६·०९५९७६७	८·७९७९६८
६८२	४६५१२४	३१७२१४५६८	२६·११५१२९७	८·८०२२७२
६८३	४६६४८९	३१८६११९८७	२६·१३४२६८७	८·८०६५७२
६८४	४६७८५६	३२००१३५०४	२६·१५३३९३७	८·८१०८६८
६८५	४६९२२५	३२१४१९१२५	२६·१७२५०४७	८·८१५१६०
६८६	४७०५९६	३२२८२८८५६	२६·१९१६०१७.	८·८१९४४७
६८७	४७१९६९	३२४२४२७०३	२६·२१०६८४८	८·८२३७३१
६८८	४७३३४४	३२५६६०६७२	२६·२२९७५४१	८·८२८०१०
६८९	४७४७२१	३२७०८२७६९	२६·२४८८०९५	८·८३२२८५
६९०	४७६१००	३२८५०९०००	२६·२६७८५११	८·८३६५५६
६९१	४७७४८१	३२९९३९३७१	२६·२८६८७८९	८·८४०८२३
६९२	४७८८६४	३३१३७३८८८	२६·३०५८९२९	८·८४५०८५
६९३	४८०२४९	३३२८१२५५७	२६·३२४८९३२	८·८४९३४४
६९४	४८१६३६	३३४२५५३८४	२६·३४३८७९७	८·८५३५९८
६९५	४८३०२५	३३५७०२३७५	२६·३६२८५२७	८·८५७८४९
६९६	४८४४१६	३३७१५३५३६	२६·३८१८११९	८·८६२०९५
६९७	४८५८०९	३३८६०८८७३	२६·४००७५७६	८·८६६३३७
६९८	४८७२०४	३४००६८३९२	२६·४१९६८९६	८·८७०५७६
६९९	४८८६०१	३४१५३२०९९	२६·४३८६०८१	८·८७४८१०
७००	४९००००	३४३००००००	२६·४५७५१३१	८·८७९०४०
७०१	४९१४०१	३४४४७२१०१	२६·४७६४०४६	८·८८३२६६
७०२	४९२८०४	३४५९४८४०८	२६·४९५२८२६	८·८८७४८८
७०३	४९४२०९	३४७४२८९२७	२६ ५१४१४७२	८·८९१७०६
७०४	४९५६१६	३४८९१३६६४	२६·५३२९९८८	८·८९५९२०
७०५	४९७०२५	३५०४०२६२५	२६·५५१८३६१	८·९००१३०
७०६	४९८४३६	३५१८९५८१६	२६·५७०६६०५	८·९०४३३६
७०७	४९९८४९	३५३३९३२४३	२६·५८९४७१६	८·९०८५३८
७०८	५०१२६४	३५४८९४९१२	२६·६०८२६९४	८·९१२७३७
७०९	५०२६८१	३५६४००८२९	२६·६२७०५३९	८·९१६९३१
७१०	५०४१००	३५७९११०००	२६·६४५८२५२	८·९२११२१

वर्ग, घन, आणि मूळ.

संख्या	वर्ग.	घन.	वर्गमूळ.	घनमूळ.
७११	५०५५२१	३५९४२५४३१	२६·६६४५८३३	८·९२५२०८
७१२	५०६९४४	३६०९४४१२८	२६·६८३३२८१	८·९२९४९०
७१३	५०८३६९	३६२४६७०९७	२६·७०२०५९८	८·९३३६६८
७१४	५०९७९६	३६३९९४३४४	२६·७२०७७८४	८·९३७८४३
७१५	५११२२५	३६५५२५८७५	२६·७३९४८३९	८·९४२०१४
७१६	५१२६५६	३६७०६१६९६	२६·७५८१७६३	८·९४६१८१
७१७	५१४०८९	३६८६०१८१३	२६·७७६८५५७	८·९५०३४४
७१८	५१५५२४	३७०१४६२३२	२६·७९५५२२०	८·९५४५०३
७१९	५१६९६१	३७१६९४९५९	२६·८१४१७५४	८·९५८६५८
७२०	५१८४००	३७३२४८०००	२६·८३२८१५७	८·९६२८०९
७२१	५१९८४१	३७४८०५३६१	२६·८५१४४३२	८·९६६९५७
७२२	५२१२८४	३७६३६७०४८	२६·८७००५७७	८·९७११०१
७२३	५२२७२९	३७७९३३०६७	२६·८८८६५९३	८·९७५२४०
७२४	५२४१७६	३७९५०३४२४	२६·९०७२४८१	८·९७९३७७
७२५	५२५६२५	३८१०७८१२५	२६·९२५८२४०	८·९८३५०९
७२६	५२७०७६	३८२६५७१७६	२६·९४४३८७२	८·९८७६३७
७२७	५२८५२९	३८४२४०५८३	२६·९६२९३७५	८·९९१७६२
७२८	५२९९८४	३८५८२८३५२	२६·९८१४७५१	८·९९५८८३
७२९	५३१४४१	३८७४२०४८९	२७·०००००००	९·००००००
७३०	५३२९००	३८९०१७०००	२७·०१८५१२२	९·००४११३
७३१	५३४३६१	३९०६१७८९१	२७·०३७०११७	९·००८२२३
७३२	५३५८२४	३९२२२३१६८	२७·०५५४९८५	९·०१२३२९
७३३	५३७२८९	३९३८३२८३७	२७·०७३९७२७	९·०१६४३१
७३४	५३८७५६	३९५४४६९०४	२७·०९२४३४४	९·०२०५२९
७३५	५४०२२५	३९७०६५३७५	२७·११०८८३४	९·०२४६२४
७३६	५४१६९६	३९८६८८२५६	२७·१२९३१९९	९·०२८७१५
७३७	५४३१६९	४००३१५५५३	२७·१४७७४३९	९·०३२८०२
७३८	५४४६४४	४०१९४७२७२	२७·१६६१५५४	९·०३६८८६
७३९	५४६१२१	४०३५८३४१९	२७·१८४५५४४	९·०४०९६५
७४०	५४७६००	४०५२२४०००	२७·२०२९४१०	९·०४५०४१

वर्ग, घन, आणि मूळ.

संख्या	वर्ग.	घन.	वर्गमूळ.	घनमूळ.
७४१	५४९०८१	४०६८६९०२१	२७.२२१३१५२	९.०४९११४
७४२	५५०५६४	४०८५१८४८८	२७.२३९६७६९	९.०५३१८३
७४३	५५२०४९	४१०१७२४०७	२७.२५८०२६३	९.०५७२४८
७४४	५५३५३६	४११८३०७८४	२७.२७६३६३४	९.०६१३१०
७४५	५५५०२५	४१३४९३६२५	२७.२९४६८८१	९.०६५३६७
७४६	५५६५१६	४१५१६०९३६	२७.३१३०००६	९.०६९४२२
७४७	५५८००९	४१६८३२७२३	२७.३३१३००७	९.०७३४७३
७४८	५५९५०४	४१८५०८९९२	२७.३४९५८८७	९.०७७५२०
७४९	५६१००१	४२०१८९७४९	२७.३६७८६४४	९.०८१५६३
७५०	५६२५००	४२१८७५०००	२७.३८६१२७९	९.०८५६०३
७५१	५६४००१	४२३५६४७५१	२७.४०४३७९२	९.०८९६३९
७५२	५६५५०४	४२५२५९००८	२७.४२२६१८४	९.०९३६७२
७५३	५६७००९	४२६९५७७७७	२७.४४०८४५५	९.०९७७०१
७५४	५६८५१६	४२८६६१०६४	२७.४५९०६०४	९.१०१७२६
७५५	५७००२५	४३०३६८८७५	२७.४७७२६३३	९.१०५७४८
७५६	५७१५३६	४३२०८१२१६	२७.४९५४५४२	९.१०९७६६
७५७	५७३०४९	४३३७९८०९३	२७.५१३६३३०	९.११३७८१
७५८	५७४५६४	४३५५१९५१२	२७.५३१७९९८	९.११७७९३
७५९	५७६०८१	४३७२४५४७९	२७.५४९९५४६	९.१२१८०१
७६०	५७७६००	४३८९७६०००	२७.५६८०९७५	९.१२५८०५
७६१	५७९१२१	४४०७११०८१	२७.५८६२२८४	९.१२९८०६
७६२	५८०६४४	४४२४५०७२८	२७.६०४३४७५	९.१३३८०३
७६३	५८२१६९	४४४१९४९४७	२७.६२२४५४६	९.१३७७९७
७६४	५८३६९६	४४५९४३७४४	२७.६४०५४९९	९.१४१७८८
७६५	५८५२२५	४४७६९७१२५	२७.६५८६३३४	९.१४५७७४
७६६	५८६७५६	४४९४५५०९६	२७.६७६७०५०	९.१४९७५८
७६७	५८८२८९	४५१२१७६६३	२७.६९४७६४८	९.१५३७३७
७६८	५८९८२४	४५२९८४८३२	२७.७१२८१२९	९.१५७७१४
७६९	५९१३६१	४५४७५६६०९	२७.७३०८४९२	९.१६१६८६
७७०	५९२९००	४५६५३३०००	२७.७४८८७३९	९.१६५६५६

वर्ग. घन. आणिमूळ.

संख्या.	वर्ग.	घन	वर्गमूळ.	घनमूळ.
७७१	५९४४४१	४५८३१४०११	२७.७६६८८६८	९.१६९६२२
७७२	५९५९८४	४६००९९६४८	२७.७८४८८८०	९.१७३५८५
७७३	५९७५२९	४६१८८९९१७	२७.८०२८७७५	९.१७७५४४
७७४	५९९०७६	४६३६८४८२४	२७.८२०८५५५	९.१८१५००
७७५	६००६२५	४६५४८४३७५	२७.८३८८२१८	९.१८५४५६
७७६	६०२१७६	४६७२८८५७६	२७.८५६७७६६	९.१८९४०२
७७७	६०३७२९	४६९०९७४३३	२७ ८९२६५१४	९.१९७२८९
७७८	६०५२८४	४७०९१०९५२	२७.९१०४७१५	९.२०१२२९
७७९	६०६८४१	४७२७२९१३९	२७.९१०५७१५	९.२०१२२१
७८०	६०८४००	४७४५५२०००	२७.९२८४८०१	९.२०५१६४
७८१	६०९९६१	४७६३७९५४१	२७.९४६३७७२	९.२०९०९६
७८२	६११५२४	४७८२११७६८	२७.९६४२६२९	९.२१३०२५
७८३	६१३०८९	४८००४८६८७	२७.९८२१३७२	९.२१६९५०
७८४	६१४६५६	४८१८९०३०४	२८.०००००००	९.२२०८७३
७८५	६१६२२५	४८३७३६६२५	२८.०१७८५१५	९.२२४७९१
७८६	६१७७९६	४८५५८७६५६	२८.०३५६९१५	९.२२८७०७
७८७	६१९३६९	४८७४४३४०३	२८.०५३५२०३	९.२३२६१९
७८८	६२०९४४	४८९३०३८७२	२८.०७१३३७७	९.२३६५२८
७८९	६२२५२१	४९११६९०६९	२८.०८९१४३८	९.२४०४३४
७९०	६२४१००	४९३०३९०००	२८.१०६९३८६	९.२४४३३५
७९१	६२५६८१	४९४९१३६७१	२८.१२४७२२२	९.२४८२३४
७९२	६२७२६४	४९६७९३०८८	२८.१४२४९४६	९.२५२१३०
७९३	६२८८४९	४९८६७७२५७	२८.१६०२५५७	९.२५६०२२
७९४	६३०४३६	५००५६६१८४	२८.१७८००५६	९.२५९९११
७९५	६३२०२५	५०२४५९८७५	२८.१९५७४४४	९.२६३७९७
७९६	६३३६१६	५०४३५८३३६	२८.२१३४७२०	९.२६७६८०
७९७	६३५२०९	५०६२६१५७३	२८.२३११८८४	९.२७१५५९
७९८	६३६८०४	५०८१६९५९२	२८.२४८८९३८	९.२७५४३५
७९९	६३८४०१	५१००८२३९९	२८.२६६५८८१	९.२७९३०८
८००	६४००००	५१२००००००	२८.२८४२७१२	९.२८३१७८

वर्ग, घन, आणि मूळ.

संख्या	वर्ग.	घन.	वर्गमूळ.	घनमूळ.
८०१	६४१६०१	५१३९२२४०१	२८·३०१९४३४	९·२८७०४४
८०२	६४३२०४	५१५८४९६०८	२८·३१९६०४५	९·२९०९०७
८०३	६४४८०९	५१७७८१६२७	२८·३३७२५४६	९·२९४७६७
८०४	६४६४१६	५१९७१८४६४	२८·३५४८९३८	९·२९८६२४
८०५	६४८०२५	५२१६६०१२५	२८·३७२५२१९	९·३०२४७७
८०६	६४९६३६	५२३६०६६१६	२८·३९०१३९१	९·३०६३२८
८०७	६५१२४९	५२५५५७९४३	२८·४०७७४५४	९·३१०१७५
८०८	६५२८६४	५२७५१४११२	२८·४२५३४०८	९·३१४०१९
८०९	६५४४८१	५२९४७५१२९	२८·४४२९२५३	९·३१७८६०
८१०	६५६१००	५३१४४१०००	२८·४६०४९८९	९·३२१६९७
८११	६५७७२१	५३३४११७३१	२८·४७८०६१७	९·३२५५३२
८१२	६५९३४४	५३५३८७३२८	२८·४९५६१३७	९·३२९३६३
८१३	६६०९६९	५३७३६७७९७	२८·५१३१५४९	९·३३३१९२
८१४	६६२५९६	५३९३५३१४४	२८·५३०६८५२	९·३३७०१७
८१५	६६४२२५	५४१३४३३७५	२८·५४८२०४८	९·३४०८३९
८१६	६६५८५६	५४३३३८४९६	२८·५६५७१३७	९·३४४६५७
८१७	६६७४८९	५४५३३८५१३	२८·५८३२११९	९·३४८४७३
८१८	६६९१२४	५४७३४३४३२	२८·६००६९९३	९·३५२२८६
८१९	६७०७६१	५४९३५३२५९	२८·६१८१७६०	९·३५६०९५
८२०	६७२४००	५५१३६८०००	२८·६३५६४२१	९·३५९९०२
८२१	६७४०४१	५५३३८७६६१	२८·६५३०९७६	९·३६३७०५
८२२	६७५६८४	५५५४१२२४८	२८·६७०५४२४	९·३६७५०५
८२३	६७७३२९	५५७४४१७६७	२८·६८७९७६६	९·३७१३०२
८२४	६७८९७६	५५९४७६२२४	२८·७०५४००२	९·३७५०९६
८२५	६८०६२५	५६१५१५६२५	२८·७२२८१३२	९·३७८८८७
८२६	६८२२७६	५६३५५९९७६	२८·७४०२१५७	९·३८२६७५
८२७	६८३९२९	५६५६०९२८३	२८·७५७६०७७	९·३८६४६०
८२८	६८५५८४	५६७६६३५५२	२८·७७४९८९१	९·३९०२४२
८२९	६८७२४१	५६९७२२७८९	२८·७९२३६०१	९·३९४०२०
८३०	६८८९००	५७१७८७०००	२८·८०९७२०६	९·३९७७९६

वर्ग. घन. आणि मूळ.

संख्या	वर्ग.	घन.	वर्गमूळ.	घनमूळ.
८३१	६९०५६१	५७३८५६१९१	२८·८२७०७०६	९·४०१५६९
८३२	६९२२२४	५७५९३०३६८	२८·८४४४१०२	९·४०५३३९
८३३	६९३८८९	५७८००९५३७	२८·८६१७३९४	९·४०९१०५
८३४	६९५५५६	५८००९३७०४	२८·८७९०५८२	९·४१२८६९
८३५	६९७२२५	५८२१८२८७५	२८·८९६३६६६	९·४१६६३०
८३६	६९८८९६	५८४२७७०५६	२८·९१३६६४६	९·४२०३८७
८३७	७००५६९	५८६३७६२५३	२८·९३०९५२३	९·४२४१४२
८३८	७०२२४४	५८८४८०४७२	२८·९४८२२९७	९·४२७८९४
८३९	७०३९२१	५९०५८९७१९	२८·९६५४९६७	९·४३१६४२
८४०	७०५६००	५९२७०४०००	२८·९८२७५३५	९·४३५३८८
८४१	७०७२८१	५९४८२३३२१	२९·००००००	९·४३९१३१
८४२	७०८९६४	५९६९४७६८८	२९·०१७२३६३	९·४४२८७०
८४३	७१०६४९	५९९०७७१०७	२९·०३४४६२३	९·४४६६०७
८४४	७१२३३६	६०१२११५८४	२९·०५१६७८१	९·४५०३४१
८४५	७१४०२५	६०३३५११२५	२९·०६८८८३७	९·४५४०७२
८४६	७१५७१६	६०५४९५७३६	२९·०८६०७९१	९·४५७८००
८४७	७१७४०९	६०७६४५४२३	२९·१०३२६४४	९·४६१५२५
८४८	७१९१०४	६०९८००१९२	२९·१२०४३९६	९·४६५२४७
८४९	७२०८०१	६११९६००४९	२९·१३७६०४६	९·४६८९६६
८५०	७२२५००	६१४१२५०००	२९·१५४७५९५	९·४७२६८२
८५१	७२४२०१	६१६२९५०५१	२९·१७१९०४३	९·४७६३९६
८५२	७२५९०४	६१८४७०२०८	२९·१८९०३९०	९·४८०१०६
८५३	७२७६०९	६२०६५०४७७	२९·२०६१६३७	९·४८३८१४
८५४	७२९३१६	६२२८३५८६४	२९·२२३२७८४	९·४८७५१८
८५५	७३१०२५	६२५०२६३७५	२९·२४०३८३०	९·४९१२२०
८५६	७३२७३६	६२७२२२०१६	२९·२५७४७७७	९·४९४९१९
८५७	७३४४४९	६२९४२२७९३	२९·२७४५६२३	९·४९८६१५
८५८	७३६१६४	६३१६२८७१२	२९·२९१६३७०	९·५०२३०८
८५९	७३७८८१	६३३८३९७७९	२९·३०८७०१८	९·५०५९९८
८६०	७३९६००	६३६०५६०००	२९·३२५७५६६	९·५०९६८५
८६१	१३२१	६३८२७७३८१	२९·३४२८०१५	९·५१३३७०
८६२	७४३०४४	६४०५०३९२८	२९·३५९८३६५	९·५१७०५१
८६३	७४४७६९	६४२७३५६४७	२९·३७६८६१६	९·५२०७३०
८६४	७४६४९६	६४४९७२५४४	२९·३९३८७६९	९·५२४४०६

वर्ग, घन, आणि मूळ.

संख्या	वर्ग.	घन.	वर्गमूळ	घनमूळ.
८६५	७४८२२५	६४७२१४६२५	२९·४१०८८२३४	९·५२८०७९४
८६६	७४९९५६	६४९४६१८९६	२९·४२७८७७९४	९·५३१७४९७
८६७	७५१६८९	६५१७१४३६३	२९·४४४८६३७३	९·५३५४१७२
८६८	७५३४२४	६५३९७२०३२	२९·४६१८३९७३	९·५३९०८१८
८६९	७५५१६१	६५६२३४९०९	२९·४७८८०५९५	९·५४२७४३७
८७०	७५६९००	६५८५०३०००	२९·४९५७६२४१	९·५४६४०२७
८७१	७५८६४१	६६०७७६३११	२९·५१२७०९१३	९·५५००५८९
८७२	७६०३८४	६६३०५४८४८	२९·५२९६४६१२	९·५५३७१२४
८७३	७६२१२९	६६५३३८६१७	२९·५४६५७३४१	९·५५७३६३०
८७४	७६३८७६	६६७६२७६२४	२९·५६३४९१००	९·५६१०१०८
८७५	७६५६२५	६६९९२१८७५	२९·५८०३९८९२	९·५६४६५६४
८७६	७६७३७६	६७२२२१३७६	२९·५९७२९७१७	९·५६८२९९८
८७७	७६९१२९	६७४५२६१३३	२९·६१४१८५७९	९·५७१९३७८
८७८	७७०८८४	६७६८३६१५२	२९·६३१०६४७८	९·५७५५७४६
८७९	७७२६४१	६७९१५१४३९	२९·६४७९३४१६	९·५७९२०८५
८८०	७७४४००	६८१४७२०००	२९·६६४७९३९५	९·५८२८३९७
८८१	७७६१६१	६८३७९७८४१	२९·६८१६४४१६	९·५८६४६८१
८८२	७७७९२४	६८६१२८९६८	२९·६९८४८४८१	९·५९००९३९
८८३	७७९६८९	६८८४६५३८७	२९·७१५३१५९२	९·५९३७१६९
८८४	७८१४५६	६९०८०७१०४	२९·७३२१३७४९	९·५९७३३७२
८८५	७८३२२५	६९३१५४१२५	२९·७४८९४९५६	९·६००९५४८
८८६	७८४९९६	६९५५०६४५६	२९·७६५७५२१३	९·६०४५६९६
८८७	७८६७६९	६९७८६४१०३	२९·७८२५४५२२	९·६०८१८१७
८८८	७८८५४४	७००२२७०७२	२९·७९९३२८८५	९·६११७९११
८८९	७९०३२१	७०२५९५३६९	२९·८१६१०३०३	९·६१५३९७७
८९०	७९२१००	७०४९६९०००	२९·८३२८६७७८	९·६१९००१७
८९१	७९३८८१	७०७३४७९७१	२९·८४९६२३११	९·६२२६०३०
८९२	७९५६६४	७०९७३२२८८	२९·८६६३६९०५	९·६२६२०१६
८९३	७९७४४९	७१२१२१९५७	२९·८८३१०५६०	९·६२९७९७५
८९४	७९९२३६	७१४५१६९८४	२९·८९९८३२७८	९·६३३३९०७
८९५	८०१०२५	७१६९१७३७५	२९·९१६५५०६०	९·६३६९८१२
८९६	८०२८१६	७१९३२३१३६	२९·९३३२५९०९	९·६४०५६९१
८९७	८०४६०९	७२१७३४२७३	२९·९४९९५८२६	९·६४४१५४३
८९८	८०६४०४	७२४१५०७९२	२९·९६६६४८१३	९·६४७७३६८

वर्ग, घन, आणि मूळ.

संख्या	वर्ग.	घन.	वर्गमूळ.	घनमूळ.
८९९	८०८२०१	७२६५७२६९९	२९·९८३३२८७	९·६५१३१६६
९००	८१००००	७२९००००००	३०·०००००००	९·६५४८९३८
९०१	८११८०१	७३१४३२७०१	३०·०१६६६२०	९·६५८४६८४
९०२	८१३६०४	७३३८७०८०८	३०·०३३३१४८	९·६६२०४०३
९०३	८१५४०९	७३६३१४३२७	३०·०४९९५८४	९·६६५६०९६
९०४	८१७२१६	७३८७६३२६४	३०·०६६५९२८	९·६६९१७६३
९०५	८१९०२५	७४१२१७६२५	३०·०८३२१७९	९·६७२७४०३
९०६	८२०८३६	७४३६७७४१६	३०·०९९८३३९	९·६७६३०१७
९०७	८२२६४९	७४६१४२६४३	३०·११६४४०७	९·६७९८६०४
९०८	८२४४६४	७४८६१३३१२	३०·१३३०३८३	९·६८३४१६६
९०९	८२६२८१	७५१०८९४२९	३०·१४९६२६९	९·६८६९७०१
९१०	८२८१००	७५३५७१०००	३०·१६६२०६३	९·६९०५२११
९११	८२९९२१	७५६०५८०३१	३०·१८२७७६५	९·६९४०६९४
९१२	८३१७४४	७५८५५०५२८	३०·१९९३३७७	९·६९७६१५२
९१३	८३३५६९	७६१०४८४९७	३०·२१५८८९९	९·७०११५८३
९१४	८३५३९६	७६३५५१९४४	३०·२३२४३२९	९·७०४६९८९
९१५	८३७२२५	७६६०६०८७५	३०·२४८९६६९	९·७०८२३६९
९१६	८३९०५६	७६८५७५२९६	३०·२६५४९१९	९·७११७७२३
९१७	८४०८८९	७७१०९५२१३	३०·२८२००७९	९·७१५३०५१
९१८	८४२७२४	७७३६२०६३२	३०·२९८५१४८	९·७१८८३५४
९१९	८४४५६१	७७६१५१५५९	३०·३१५०१२८	९·७२२३६३१
९२०	८४६४००	७७८६८८०००	३०·३३१५०१८	९·७२५८८८३
९२१	८४८२४१	७८१२२९९६१	३०·३४७९८१८	९·७२९४१०९
९२२	८५००८४	७८३७७७४४८	३०·३६४४५२९	९·७३२९३०९
९२३	८५१९२९	७८६३३०४६७	३०·३८०९१५१	९·७३६४४८४
९२४	८५३७७६	७८८८८९०२४	३०·३९७३६८३	९·७३९९६३४
९२५	८५५६२५	७९१४५३१२५	३०·४१३८१२७	९·७४३४७५८
९२६	८५७४७६	७९४०२२७७६	३०·४३०२४८१	९·७४६९८५७
९२७	८५९३२९	७९६५९७९८३	३०·४४६६७४७	९·७५०४९३१
९२८	८६११८४	७९९१७८७५२	३०·४६३०९२४	९·७५३९९७९
९२९	८६३०४१	८०१७६५०८९	३०·४७९५०१३	९·७५७५००३
९३०	८६४९००	८०४३५७०००	३०·४९५९०१४	९·७६१०००१
९३१	८६६७६१	८०६९५४४९१	३०·५१२२९२६	९·७६४४९७४
९३२	८६८६२४	८०९५५७५६८	३०·५२८६७५०	९·७६७९९२२

वर्ग, घन, आणि मूळ.

संख्या	वर्ग.	घन	वर्गमूळ.	घनमूळ.
९३३	८७०४८९	८१२१६६२३७	३०.५४५०४८७	९.७७१४८४
९३४	८७२३५६	८१४७८०५०४	३०.५६१४१३६	९.७७४९७४
९३५	८७४२२५	८१७४००३७५	३०.५७७७६९७	९.७७८४६२
९३६	८७६०९६	८२००२५८५६	३०.५९४११७१	९.७८१९४६
९३७	८७७९६९	८२२६५६९५३	३०.६१०४५५७	९.७८५४२९
९३८	८७९८४४	८२५२९३६७२	३०.६२६७८५५	९.७८८९०९
९३९	८८१७२१	८२७९३६०१९	३०.६४३१०६९	९.७९२३८६
९४०	८८३६००	८३०५८४०००	३०.६५९४१९४	९.७९५८६१
९४१	८८५४८१	८३३२३७६२१	३०.६७५७२३३	९.७९९३३४
९४२	८८७३६४	८३५८९६८८८	३०.६९२०१८५	९.८०२८०४
९४३	८८९२४९	८३८५६१८०७	३०.७०८३०५१	९.८०६२७१
९४४	८९११३६	८४१२३२३८४	३०.७२४५८३०	९.८०९७३६
९४५	८९३०२५	८४३९०८६२५	३०.७४०८५२३	९.८१३१९९
९४६	८९४९१६	८४६५९०५३६	३०.७५७११२०	९.८१६६५९
९४७	८९६८०९	८४९२७८१२३	३०.७७३३६५१	९.८२०११७
९४८	८९८७०४	८५१९७१३९२	३०.७८९६०८६	९.८२३५७२
९४९	९००६०१	८५४६७०३४९	३०.८०५८४३६	९.८२७०२५
९५०	९०२५००	८५७३७५०००	३०.८२२०७००	९.८३०४७६
९५१	९०४४०१	८६००८५३५१	३०.८३८२८७९	९.८३३९२४
९५२	९०६३०४	८६२८०१४०८	३०.८५४४९७३	९.८३७३६९
९५३	९०८२०९	८६५५२३१७७	३०.८७०६९११	९.८४०८१३
९५४	९१०११६	८६८२५०६६४	३०.८८६८९०६	९.८४४२५४
९५५	९१२०२५	८७०९८३८७५	३०.९०३०७४२	९.८४७६९२
९५६	९१३९३६	८७३७२२८१६	३०.९१९२४९७	९.८५११२८
९५७	९१५८४९	८७६४६७४९३	३०.९३५४१६६	९.८५४५६२
९५८	९१७७६४	८७९२१७९१२	३०.९५१५७५१	९.८५७९९३
९५९	९१९६८१	८८१९७४०७९	३०.९६७७२५२	९.८६१४२२
९६०	९२१६००	८८४७३६०००	३०.९८३८६६९	९.८६४८४८
९६१	९२३५२१	८८७५०३६८१	३१.०००००००	९.८६८२७२
९६२	९२५४४४	८९०२७७१२८	३१.०१६१२४८	९.८७१६९४
९६३	९२७३६९	८९३०५६३४७	३१.०३२२४१३	९.८७५११३
९६४	९२९२९६	८९५८४१३४४	३१.०४८३४९४	९.८७८५३०
९६५	९३१२२५	८९८६३२१२५	३१.०६४४४९१	९.८८१९४५
९६६	९३३१५६	९०१४२८६९६	३१.०८०५४०५	९.८८५३५७

वर्ग, घन, आणि मूळ.

संख्या	वर्ग.	घन.	वर्गमूळ.	घनमूळ.
९६७	९३५०८९	९०४२३१०६३	३१.०९६६२३६	९.८८८७६७३
९६८	९३७०२४	९०७०३९२३२	३१.११२६९८४	९.८९२१७४९
९६९	९३८९६१	९०९८५३२०९	३१.१२८७६४८	९.८९५५८०१
९७०	९४०९००	९१२६७३०००	३१.१४४८२३०	९.८९८९८३०
९७१	९४२८४१	९१५४९८६११	३१.१६०८७२९	९.९०२३८३५
९७२	९४४७८४	९१८३३००४८	३१.१७६९१४५	९.९०५७८१७
९७३	९४६७२९	९२११६७३१७	३१.१९२९४७९	९.९०९१७७६
९७४	९४८६७६	९२४०१०४२४	३१.२०८९७३१	९.९१२५७१२
९७५	९५०६२५	९२६८५९३७५	३१.२२४९९००	९.९१५९६२४
९७६	९५२५७६	९२९७१४१७६	३१.२४०९९८७	९.९१९३५१३
९७७	९५४५२९	९३२५७४८३३	३१.२५६९९९२	९.९२२७३७९
९७८	९५६४८४	९३५४४१३५२	३१.२७२९९१५	९.९२६१२२२
९७९	९५८४४१	९३८३१३७३९	३१.२८८९७५७	९.९२९५०४२
९८०	९६०४००	९४११९२०००	३१.३०४९५१७	९.९३२८८३९
९८१	९६२३६१	९४४०७६१४१	३१.३२०९१९५	९.९३६२६१३
९८२	९६४३२४	९४६९६६१६८	३१.३३६८७९२	९.९३९६३६४
९८३	९६६२८९	९४९८६२०८७	३१.३५२८३०८	९.९४३००९२
९८४	९६८२५६	९५२७६३९०४	३१.३६८७७४३	९.९४६३७९७
९८५	९७०२२५	९५५६७१६२५	३१.३८४७०९७	९.९४९७४७९
९८६	९७२१९६	९५८५८५२५६	३१.४००६३६९	९.९५३११३८
९८७	९७४१६९	९६१५०४८०३	३१.४१६५५६१	९.९५६४७७५
९८८	९७६१४४	९६४४३०२७२	३१.४३२४६७३	९.९५९८३८९
९८९	९७८१२१	९६७३६१६६९	३१.४४८३७०४	९.९६३१९८१
९९०	९८०१००	९७०२९९०००	३१.४६४२६५४	९.९६६५५४९
९९१	९८२०८१	९७३२४२२७१	३१.४८०१५२५	९.९६९९०९५
९९२	९८४०६४	९७६१९१४८८	३१.४९६०३१५	९.९७३२६१९
९९३	९८६०४९	९७९१४६६५७	३१.५११९०२५	९.९७६६१२०
९९४	९८८०३६	९८२१०७७८४	३१.५२७७६५५	९.९७९९५९९
९९५	९९००२५	९८५०७४८७५	३१.५४३६२०६	९.९८३३०५५
९९६	९९२०१६	९८८०४७९३६	३१.५५९४६७७	९.९८६६४८८
९९७	९९४००९	९९१०२६९७३	३१.५७५३०६८	९.९८९९९००
९९८	९९६००४	९९४०११९९२	३१.५९११३८०	९.९९३३२८९
९९९	९९८००१	९९७००२९९९	३१.६०६९६१३	९.९९६६६५६
१०००	१००००००	१००००००००००	३१.६२२७७६६	१०.०००००००

उत्तर, गुणोत्तर प्रमाण, आणि श्रेढी याची रीति.

संख्या वेगळाले दोन रीतानी परस्पर परिक्षिल्या आहेत.

एक परीक्षण दोन संख्यांचे वजाबाकीवर विचारण आहे, त्यास गणित संबंधी ह्मणतात; आणि दोन संख्यांचे वजाबाकीस उत्तर म्हणतात; दुसरें परीक्ष ण त्यांचे भागाकारावर विचारण आहे. त्यास भूमिति संबंधि ह्मणतात; आणि भागाकारास गुणोत्तर ह्मणतात. जसें ६ आणि ३ यादोन संख्यांतील वजाबाकी अथवा उत्तर ६-३=३ बरोबर आहे, परंतु गुणोत्तर $\frac{६}{३}$=२ आहे.

कोणतेंही परीक्षण करायास संख्या दोन पाहिजेत; जी संख्या परीक्ष्य आहे तीस प्रथम लिहून अग्रसर ह्मणतात; आणि ज्या संख्येशीं प्रथम परिक्षिली त्या संख्येस पुढें लिहून उपाग्रसर ह्मणतात. जसें वरचे दोन संख्यांतील ६ अग्रसर, आणि ३ उपाग्रसर आहे.

जर संख्यांचीं दोन किंवा अधिक युग्में आहेत, आणि त्यांचें उत्तर अथवा गुणोत्तर सम आहे; तेव्हां त्या समतेस प्रमाण ह्मणतात, आणि उत्तर व गुणोत्तर याचे पदांस प्रमाण पदें ह्मणतात. जसेंहीं दोन युग्में, ४, २, आणि ८, ६, हीं गणित प्रमाण पदें आहेत, कारण ४-२=८-६=२; आणिहीं दोन युग्में, ८, २ आणि ६, ३, हीं भूमिति प्रमाण पदें आहेत, कारण, $\frac{८}{२}$ $\frac{६}{३}$=२.

संख्या भूमिति प्रमाणांत आहेत असें दाखवाया करितां प्रत्येक युग्मां दोन पदां मध्यें उभे दोन बिंदू करितात; आणि प्रत्येक युग्मांचे मध्यें चार बिंदु देतात, जसें ४ ; २, ६, ३; हीं चार पदें याप्रमाणें लिहितात.

४ : २ : : ६ : ३, यांत अर्थ हाच आहेकीं ४ ही संख्या २ या संख्येस आहे, जसें ६ ही संख्या ३ या संख्येस आहे, अथवा याप्रमाणें ४ : २=६ : ३, अथवा याप्रमाणें $\frac{४}{२}$ = $\frac{६}{३}$, या दोहोंमध्यें अर्थ हाच आहेकीं ४ आणि २ यांचे गुणोत्तर ६ आणि ३ यांचे गुणोत्तराशीं सम आहे.

प्रमाण दोन प्रकारचें आहे, खंड आणि अखंड, जेव्हां एक युग्माचा उपाग्रसर आणि त्याचे जवळचे दुसरे युग्माचा अग्रसर यांचें उत्तर किंवा गुणोत्तर सर्व युग्मांचे साधारण उत्तराशीं किंवा तसेंच गुणोत्तराशीं सम नाहीं, ते व्हां तें खंड प्रमाण ह्मणतात. जसें, ४, २, ८, ६, हें खंडगणित प्रमाण आहे, कारण, ४-२=८-६=२. परंतु ८-२=६: आणि ४, २, ६, ३ हें खंड भूमिति प्रमाण आहे. कारण. $\frac{४}{२}$=$\frac{६}{३}$=२ परंतु $\frac{६}{२}$=३. हें गुणोत्तराशीं सम नाहीं.

परंतु जेव्हां उत्तरोत्तर अनुक्रमें जवळ जवळचे दोन दोन पदांचें उत्तर किं

या गुणोत्तर सम आहे, तेव्हां अशा प्रमाणास अखंड ह्मणतात. आणि संख्या स्वतां अखंड प्रमाण पदांची श्रेढी होतात. जसें २, ४, ६, ८, ही गणित श्रेढी आहे, कारण, ४-२=६-४=८-६=२, या सर्वांचे उत्तर सम आहे; आणि २, ४, ८, १६, ही भूमिति श्रेढी आहे, कारण, $\frac{४}{२}=\frac{८}{४}=\frac{१६}{८}=२$ हें सर्वांचें गुणोत्तर सम आहे.

जेव्हां प्रमाणपदें एकापुढें एक चढती आहेत, तेव्हां चढती श्रेढी ह्मणतात. जेव्हां तींच पदें एकापुढें एक उतरती आहेत, तेव्हां उतरती श्रेढी ह्मणतात.

जसें, ०, १, २, ३, ४, इत्यादि चढती गणितश्रेढी आहे. परंतु, ९, ७, ५, ३, १, इत्यादि उतरती गणितश्रेढी आहे.

आणि १, २, ४, ८, १६, इत्यादि, चढती भूमिति श्रेढी आहे, परंतु १६, ८, ४, २, १, इत्यादि, उतरती भूमिति श्रेढी आहे.

गणितप्रमाण आणि, श्रेढी.

गणित श्रेढीमध्यें सर्व संख्यांचें अथवा पदांचें उत्तर एकच आहे आणि गणितश्रेढीचे प्रथम आणि शेवट या दोन पदांस अनुक्रमें आदि आणि अंत ह्मणतात; आणि त्यांचे आंतील राहिले सर्व पदांस मध्य ह्मणतात. गणित प्रमाणाचा जो अति उपयोगी अंश आहे तो या पुढील सिद्धांतांत लिहिला आहे.

प्रथम सिद्धांत. जेव्हां चार अवयवी गणितप्रमाणांत आहेत, तेव्हां आद्यंतांची बेरीज दोन मध्य पदांचे बेरिजेचे बरोबर आहे जसें यांचे होतें, २, ४, ६, ८, एथें २+८=४+६=१०

दुसरा सिद्धांत. कोणतेही अखंड गणित श्रेढीमध्यें आद्यंतांची बेरीज दोन मध्यपदांचे बेरिजेच बरोबर आहे, जी मध्यें पदें आद्यंतांपासून समान अंतरानें आहेत, अथवा श्रेढी विषमपद असल्यास मध्यपदाचे दुप्पटीबरोबर आहे जसें या पदांत १, ३, ५, एथें १+५=३+३=६.

आणि या श्रेढींत २, ४, ६, ८, १०, १२, १४, एथें २+१४=४+१२ =६+१०=८+८=१६.

तिसरा सिद्धांत, कोणतेही गणितश्रेढींतील आद्यंतांची वजाबाकी त्याच श्रेढीचें उत्तर एकोन गच्छानें गुणिलें त्या गुणाकाराचे बरोबर आहे. जसें या दाहा पदांत २, ४, ६, ८, १०, १२, १४, १६, १८, २०, यांचें उत्तर २, आणि एकोन गच्छ ९, आहे; तेव्हां आद्यंतांची वजाबाकी ह्मणजे २०-२=१८, आणि ही २×९=१८

याजकरितां, अतिमोठेंपद, एकोन गच्छानें गुणिलें उत्तर आणि अतिऱ्हासप द यांचें बेरिजे बरोबर आहे.

चौथासिद्धांत. कोणतेही गणित श्रेढीचें सर्वधन, आद्यंतांची बेरीज गुणि ली गच्छानें आणि तो गुणाकार भागिला दोहोंनीं याचे बरोबर आहे, अथवा. आ द्यंतांची बेरीज गच्छानें गुणून तो गुणाकार श्रेढीचे सर्व धनाचे दुपट होतो.

सांगितले श्रेढीचीं सर्व पदें सरळ रीतीनें अनुक्रमें एक ओळींत लिहून पु नः तींच पदें व्युत्क्रमरीतीनें पदा खालीं पद अशीं दुसरे ओळींत लिहून त्या दो न ओळी खालीं सर्व पदांच्या वेगळाल्या बेरिजा घ्याव्या, अशानें हें स्पष्ट होतें जसें.

या श्रेढीमध्यें १, ३, ५, ७, ९, ११, १३, १५,

व्युत्क्रमानें १५, १३, ११, ९, ७, ५, ३, १,

यांच्या बेरिजा १६ + १६ + १६ + १६ + १६ + १६ + १६ + १६;

ही बेरीज वरचे एक श्रेढीचे सर्वधनाचे दुपट आहे.

अथवा आद्यंतांची बेरीज श्रेढीचे पद संख्या वेळा घ्यावी.

यासिद्धांता पासून आदि, अंत, गच्छ, उत्तर, आणि सर्वधन, या पांच - अवयवांतून कोणतेही तीन सांगितले असतां बाकीचे दोन निघती ल. असें पुढील कृत्यांत.

प्रथमकृत्य.

आदि, अंत, आणि गच्छ हे तीन सांगितले असतां, यां पासून सर्वधन का ढावयाचें.

आदि, अंताची बेरीज घ्यावी. आणि ती गच्छानें गुणावी; नंतर तो गुणाका र दोहोंनीं भागावा, जो भागाकार येईल तें सर्वधन झालें.

उदाहरणें.

प्रथम, आदि ३, अंत १९, आणि गच्छ यां पासून सर्वधन का य होईल?

```
      १९
       ३
   ─────
      २२
       ९
   ─────
२) १९८
      ९९   हें उत्तर.
```

अथवा १९ + ३ + ९ = २२ + ९ = ११ + ९ = ९९ सर्वधन हें पूर्व रीतीप्रमाणें बरोबर आहे.

दुसरें. पञ्चाळींत नाना भेदांमध्यें इंग्रजी रीतीप्रमाणें किती टोले वाजतात तें सांग.

उत्तर, ७८ टोले.

तिसरें; तिनीसनामें गांव आहे; तेथें एका पासून चोवीस अपर वाजता, दिवस रात्र मिळून त्या घड्याळांत २४ अवयंत किती टोले वाजतात तें सांग.

उत्तर, ३०० टोले.

नवथें, कोणे गृहस्थास कर्ज आहे; त्यास इंग्रेजी विलायती मानानें एकवर्षात आठवडे ५२ तेव्हां प्रथम आठवड्यास १ रुपया, पुढें प्रति आठवड्यास चढतें देतां शेवटील आठवड्यास रुपये १०३ या प्रमाणें दिल्यास तो गृहस्थ १ वर्षांत कर्जमुक्त होतो; तेव्हां आरंभीं सगळें कर्ज किती रुपये तें सांग.

उत्तर, २७०४ रु.

दुसरें कृत्य.

आदि अंत आणि गच्छ हे तीन सांगितले असतां, त्यांपासून उत्तर काढावयाचें.

अति मोठें शेवट पदांतून अति लहान पद वजा करावें, आणि बाकी राहील ती एकोन गच्छानें भागावी, जो भागाकार येईल तें उत्तर झालें.

उदाहरणें.

प्रथम, आदि ३, अंत १९, आणि गच्छ ९, यांपासून उत्तर काय तें काढ.

$\frac{19-3}{9-1} = \frac{16}{8} = 2$ हें उत्तर.

दुसरें, आदि १०, अंत ७०, आणि गच्छ २१, आहे; यांपासून उत्तर आणि सर्वधन काय तें काढ.

३ उत्तर, आणि ८४० सर्वधन.

तिसरें, कोणी गृहस्थास कर्ज आहे. त्यास विलायती मानानें एक वर्षांत आठवडे ५२ तेव्हां प्रथम आठवड्यास १ रुपया पुढें चढतें शेवटील आठवड्यास १०३ रुपये देतां १ वर्षांत कर्जमुक्त होईल, तेव्हां उत्तर काय तें सांग.

२ रुपये, हें उत्तर.

तिसरें कृत्य.

एक शेवटील पद, उत्तर आणि गच्छ, हीं तीन सांगितलीं असतां; यांपासून दुसरें शेवटील पद व सर्वधन काढावयाचें.

उत्तर एकोन गच्छानें गुणून; तो गुणाकार आदि अंतांची वजावाकी होइल; म्हणजे, अति लहान पद सांगितलें आहे तर हा गुणाकार त्या पदाशीं मिळवावा, ह्मणजे अति मोठें पद झालें. अति मोठें पद सांगितलें आहे तर तो गुणाकार त्या पदांतून वजा करावा, ह्मणजे अति लहान पद झालें.

उदाहरणें.

प्रथम, अति लहान शेवटील पद ३, उत्तर २, आणि गच्छ ९, हें सांगितलें. याजपासून अति मोठें शेवटील पद व सर्व धन काय निघेल.

```
 १९
  ३
 ---
२)१६(
  ८
  १
 ---
 १९   हें अति मोठें शेवटील पद.
यावरकरितां  ३   हें अति लहान शेवटील पद.
 ---
 २२   बेरीज
  ९   गच्छ.
 ---
२)१९८(
  ९९   सर्वधन. हें उत्तर.
```

दुसरें, जर अति मोठें शेवटील पद १९. उत्तर २. आणि गच्छ २१. आहे तर यां पासून अति लहान शेवट पद व सर्वधन काय निघेल तें सांग.

उत्तर. १९ अति लहान शेवटील पद ८४९ सर्वधन.

तिसरें. कोणी एक गृहस्थास कर्ज आहे. विलायती मानानें एक वर्षांत आठवडे ५२. तेव्हां प्रथम आठवड्यास १ रुपया, दुसरे आठवड्यास ३ रुपये याप्रमाणें दर आठवड्यास दोन दोन रुपये चढते देतो; एक वर्षांत ५२ हप्त्यानींतो गृहस्थ कर्जमुक्त होइल, तेव्हां ५२ वें हप्त्यास किती रुपये व सर्व कर्ज किती आहे तें सांग. उत्तर, शेवटील हप्त्यास १०३ रुपये, आणि सर्व कर्ज २७०४ रुपये.

चवथें कृत्य.

कोणतेही सांगितल्या दोन पदांचें गणित मध्यप्रमाण काढावयाचें.

दोन पदें अथवा दोन संख्या सांगितल्या आहेत त्यांची बेरीज घ्यावी, नंतर त्याचे बेरिजेचें अर्ध करावें. तें अर्ध, गणित मध्यप्रमाण झालें.

उदाहरण.

४ आणि १४ हीं दोन पदें अथवा संख्या सांगितल्या. यांचें गणित मध्यप्रमाण काय होइल. $\frac{४ + १४}{२} = ९$. गणितमध्यप्रमाण झालें. हें उत्तर

पांचवें कृत्य.

कोणतेही दोन पदां पासून दोन गणित मध्यप्रमाणें काढावयाचें.

अति लहान पद अति मोठे पदांत वजा करावें. बाकी राहील तीस ३ नीं भागावी. जो भागाकार येइल तें गणितश्रेणीचें उत्तर झालें; नंतर हें उत्तर अति लहान पदाशीं मिळवावें. व अति मोठे पदांतून वजा करावें. म्हणजे त्या दोन पदांजवळचीं पदें मध्यप्रमाणें झालीं. पुढेंही याप्रमाणें करीत जावें. म्हणजे दोन दोन मध्यप्रमाणें निघतील.

उदाहरण.

२ आणि − या दोन संख्यांची दोन गणित मध्य प्रमाणे सांग
२
८
)६(
२ हें उत्तर. तर २ + २ = ४ एक गणित मध्यप्रमाण.
आणि ४ + २ = ६ दुसरें गणित मध्यप्रमाण

साहावें कृत्य.

कोणतेही दोन पदां पासून हावीं तेवढीं मध्यप्रमाणें काढावयाचें

अंतिमोठ्या पदांतून अतिलहान पद वजा करावें, बाकी राहील ती एकाधिक मध्यगच्छानें भागावी, जो भागाकार येईल तें श्रेणीचें उत्तर झालें; नंतर तें उत्तर अतिलहान पदापासून पदांत मिळवीत चालावें, अथवा अतिमोठ्या पदापासून पदांतून वजा करीत चालावें, म्हणजे हावीं तेवढीं मध्यप्रमाणें येतात.

उदाहरणें.

२ आणि १४ या दोन संख्यांपासून पांच गणित मध्यप्रमाणें काढावीं.

$$\begin{array}{r} 14 \\ 2 \\ \hline 6)\ 12 \\ \hline 2 \end{array} \text{ उत्तर}$$

नंतर हें उत्तर अतिलहान पदाशीं मिळवीत जातां ४, ६, ८, १०, १२, हीं पांच गणित मध्यप्रमाणें निघालीं हें उत्तर.

पांत जें कांहीं अधिक लिहावयाचें राहिलें तें बीजगणितामध्यें पाहा.

भूमितिप्रमाण आणि श्रेढी.

जर २ युग्में घेतलीं, जसें ६ : ३, आणि १४ : ७, म्हणजे पूर्वी सांगितल्याप्रमाणें तीं व्यवहारी अपूर्णांकरूपानें लिहिलीं जातात $\frac{6}{3}$ आणि $\frac{14}{7}$, आतां त्यांचें गुणोत्तर सम आहे किंवा विषम आहे हें पाहावयासाठीं त्यांस समछेद केलें पाहिजे. असें झाल्यावर ६ + ७ आणि १४ + ३ हे दोन नवे अंश होतात. जर ते नवे अंश सम आहेत तर युग्मांचें गुणोत्तर बरोबर आहे. या जकरितां.

प्रथमसिद्धांत, जर चार अवयवें भूमितिप्रमाणांत असतील, तर आद्यंतांचा गुणाकार मध्यांचे गुणाकारा बरोबर होईल.

आणि पाजवरून जर, दोन मध्यांचा गुणाकार कोणते एक शेवटपदानें भागिला असतां, भागाकार येईल तो दुसरें शेवट पद होईल. जसें वरच्या संख्यांमध्यें, जर मध्यांचा गुणाकार ४२ हा ६ या एक शेवटपदानें भागिला असतां, भागाकार ७ येतो, तें दुसरें शेवटपद आहे, आणि जर ४२ हा ७ यानें भागिला असतां भागाकार ६ येतो, तें

दुसरें शेवट पद आहे. त्रैराशिकामध्यें सांगितलेल्या नियमास आश्रय हाच आहे.

यावरूनही पाहातां, ६, ३, १४, ७, अशा कोणत्याही चार संख्यांमध्यें जर मध्यांचा आणि शेवटांचा गुणाकार बरोबर आहे तर यांतच गुणोत्तरही बरोबर आहे असें जाणावें $\frac{६}{३}=\frac{१४}{७}$ अथवा या प्रमाणाची सत्ता ६ : ३ : : १४ : ७. याजवरून

दुसरा सिद्धांत. कोणतेही दोन गुणाकार बरोबर असतील तर त्याचे वेगळाले कर्त्यांपासून एक प्रमाण करतां येईल.

जर २ मध्य पदें बरोबर असतील, जसें या पदांमध्यें ३, ६, ६, १२ तर त्या मध्य पदांचा गुणाकार वर्ग होईल. याजवरून.

तिसरा सिद्धांत, कोणतेही दोन संख्यांचें मध्यप्रमाण त्या संख्यांचे गुणाकाराचें वर्गमूळ आहे.

कोणतेही प्रमाणांचीं वेगळालीं पदें स्थळांतर करून लिहिलीं, अशांकीं ज्यांत आद्यंतांचा गुणाकार मध्यांचे गुणाकारा बरोबर राहील, तर प्रमाणाचे शुद्धीचा नाश होत नाहीं.

जसें ६ : ३ : : १४ : ७ या प्रमाणामध्यें ६×७ = ३×१४ त्यांचे शेवट पदांस किंवा मध्य पदांस स्थळांतर करितां येईल हें परावर्तानें होतें असें ह्मणतात.

जसें ६ : १४ : : ३ : ७

अथवा, ७ : ३ : : १४ : ६

अथवा ७ : १४ : : ३ : ६

अथवा, दुसरे रीतीनें, शेवट पदें मध्य पदांचे स्थळीं लिहितां येतील, हें व्यत्ययानें होतें असें ह्मणतात.

जसें ३ : ६ : : ७ : १४

अथवा तिसरे रीतीनें दोनही अग्रसरांस अथवा उपाग्रसरांस प्रमाणतेचा नाश न होतां कोणतेही एक संख्येनें गुणतां किंवा भागितां येईल.

जसें ६×४ : ३ : : १४×४ : ७ ह्मणजे २४ : ३ : : ५६ : ७

आणि ६÷२ : ३ : : १४÷२ : ७ ह्मणजे ३ : ३ : : ७ : ७

आणि व्यवहारी अपूर्णांकाचे मिळवणीतील दुसरे दीपेमध्यें जी प्रतिज्ञा आहे ती प्रमाण पदांस लाविली असतां, जसें यांत १० : ६ : : १५ : ९, अथवा $\frac{१०}{६}=\frac{१५}{९}$ ने ह्यापांस ती प्रतिज्ञा लाऊन हें रूप होतें.

$\frac{१०\pm६}{६}=\frac{१५\pm९}{९}$ आणि $\frac{१०+१५}{६+९}=\frac{१०-१५}{६-९}$ याजवरून.

चवथा सिद्धांत, अग्रसरांची बेरीज अथवा वजाबाकी उपाग्रसरांचे बे-

रिजेस अथवा वजाबाकीस आहे, जसा त्यांतील कोणताही अग्रसर त्याचे उपाग्रसरास आहे.

पांचवा सिद्धांत. अग्रसरांची बेरीज त्यांचे वजाबाकीस आहे, जशी उपाग्रसरांची बेरीज त्यांचे वजाबाकीस.

अशा रीतीनें जर युग्मांची श्रेढी असेल, जसें $\frac{६}{३}=\frac{१०}{५}=\frac{१४}{७}=\frac{३०}{१५}$; त्यांस ह्या प्रमाणें रूप होईल. $\frac{६+१०+१४+३०}{३+५+७+१५}=\frac{१४}{७}=\frac{३०}{१५}$ इत्यादि यांजवरून.

साहावा सिद्धांत. भूमिति प्रमाणांत युग्मांचे कोणते ही श्रेढीमध्यें सर्व अग्रसरांची बेरीज त्यांतील सर्व उपाग्रसरांचे बेरिजेस आहे, जसा त्यांतील कोणते ही एक युग्मांचा अग्रसर त्याचे उपाग्रसरास.

सातवा सिद्धांत. जर दोन प्रमाणें अनुक्रमें पदशः गुणिलीं, तर ते गुणाकार नवें एक प्रमाण करितील.

जसें, जर ३० : १५ : : ६ : ३

आणि २ : ३ : : ४ : ६

तर ३०+२ : १५+३ : : ६+४ : ३+६

अथवा ६० : ४५ : : २४ : १८ अथवा $\frac{६०}{४५}=\frac{२४}{१८}$

आठवा सिद्धांत. जर चार पदें प्रमाणांत आहेत, तर त्यांचे वर्ग घनादिक ही प्रमाणांत होतील.

कां. स्पष्ट आहे कीं, यांत हेंच मात्र आहे कीं एकच प्रमाण वर प्रमाणें पुनः पुनः गुणून ते गुणाकार वर्ग घनादि होतात

तसेंच हे गुणकरणीवरही लागतात.

जसें $\sqrt{७२०} : \sqrt{८०} : : \sqrt{५६७} : \sqrt{६३}$

आणि $\sqrt{१२} : \sqrt{३} : : \sqrt{४} : \sqrt{१}$

कां $\frac{७२०}{८०}=\frac{\sqrt{९}}{\sqrt{१}}=\frac{३}{१}$ आणि $\frac{\sqrt{५६७}}{\sqrt{६३}}=\frac{\sqrt{१०६३}}{\sqrt{६२}}=\frac{३}{१}$

आणि $\frac{\sqrt{१२}}{\sqrt{३}}=\sqrt{\frac{१२}{३}}=\frac{\sqrt{४}}{१}=\frac{२}{१}$

नववा सिद्धांत. भूमिति श्रेढीचे शेवट पदांचा भागाकार त्याच श्रेढीचे गुणोत्तरास घात प्रकाशक एकोनगच्छ केला इतक्या घाताचे बरोबर आहे.

जसें, २ ४ ८ १६ ३२ ६४ १२८ २५६ ५१२ १०२४, या दहा पदांत गुणोत्तर २ आहे, एकोनगच्छ ९ आहे; ते ह्यां शेवटांचा भागाकार $\frac{१०२४}{२}=५१२$, आणि $२^{९}=५१२$ हे ही बरोबर आहेत.

याजकरितां अति मोठें पद. अति लहान पद गुणिलें गुणोत्तराचे घाता

ते त्यास घातप्रकाशक. एकोन गुणो आहे. त्या गुणाकारा बरोबर आहे

दुसरा नियम सिद्धांत. पदांचें सर्वधन भूमितिश्रेढीमध्ये यावरील नें निघतें; दोनशेवटो

ची वजावाकी एकोन गुणोत्तरानें भागावी, नंतर त्या भागाकारांत अतिमोठें पद मिळ

वावें तो बेरीज सर्वधन झालें.

जसें या पदांचें सर्वधन २. ४. ८. १६. ३२, ६४. १२८. २५६. ५१२,

१०२४. त्यांचे गुणोत्तर २. असें आहे $१०२४+\frac{१०२४-२}{२-१}=१०२४+१०२२=२०४६$ हें सर्वधन.

या प्रमाणें वर लिहिल्या शिवाय. भूमितिचा विस्तार आहे तो पुढें बीजगणितांत लिहील.

पूर्वी सिद्धांत समजावयाकारितां कांहीं उदाहरणें लिहितों. व भूमिति मध्यप्रमा

णावाचून किती एक कृत्यें ही सांगतों.

उदाहरणें.

प्रथम. एक भूमितिश्रेढी मध्यें दाहा पदें आहेत. त्यांत अतिलहान पद १; आणि

गुणोत्तर २; तें त्यां मोठें पद आणि सर्वधन काय होईल ?

उत्तर. अतिमोठें पद ५१२ आणि सर्वधन १०२३.

दुसरें. कोणी एक गृहस्थास कर्ज आहे. तें असें कीं, प्रथम हप्त्यास रुपये १०

पुढें दर हप्त्यास दुपटीनें चढते या प्रमाणें दरमहिन्यास हप्ता देतो १२ महिन्यांनी फिटे

ल; तेव्हां बारावे हप्त्यास किती रुपये द्यावे पडतात, व सर्व कर्ज किती असेल तें सांग ?

उत्तर. शेवट हप्त्यास २०४८० रुपये आणि सर्व कर्ज ४०९५० रु.

प्रथम कृत्य.

कोणतेही दोन संख्यांचें एक भूमिति मध्यप्रमाण काढायाचें.

त्या दोन संख्या परस्पर गुणाव्या नंतर त्या गुणाकाराचें वर्गमूळ काढावें, तें भूमि

ति मध्यप्रमाण होतें.

उदाहरण.

दोन संख्या ३ आणि १२. यांचे भूमिति मध्यप्रमाण काय ?

$$\begin{array}{r} १२ \\ ३ \\ \hline ३६ (६ \\ ३६ \\ \hline \end{array}$$

६ भूमिति मध्यप्रमाण हें उत्तर.

दुसरें कृत्य.

कोणतेही दोन संख्यांची दोन भूमिति मध्यप्रमाणें काढायाचें.

मोठी संख्या लाहान संख्येनें भागावी. नंतर, त्या भागाकाराचें घनमूळ काढा

वें. तें पदांचें गुणोत्तर होईल. तें त्यांस सांगितलेले लहान पद या गुणोत्तरानें गुणावें तो.

गुणाकार मथम भूमिति मध्य प्रमाण झालें; नंतर हेच मध्यप्रमाण पुनः गुणोत्तरानें गुणावें तें दुसरें भूमिति मध्यप्रमाण होईल. अथवा. मोठें पद गुणोत्तरानें भागावें. तो भागाकार मोठें भूमिति मध्य प्रमाण होईल. नंतर तेंच पुनः गुणोत्तरानें भागावें. तो भागाकार लाहान भूमिति मध्य प्रमाण होईल.

उदाहरण.

३ आणि २४ यांचीं दोन भूमिति मध्य प्रमाणें काढावीं.

आतां २४ ÷ ३ = ८ यांचें घनमूळ २ हें पदांचें गुणोत्तर झालें.

तेव्हां ३ + २ = ६ आणि ६ + २ = १२. हीं दोन भूमिति मध्यें प्रमाणें निघालीं.

अथवा २४ ÷ २ = १२. आणि १२ ÷ २ = ६ हीं वरचे बरोबर आहेत.

ह्मणजे ३ आणि २४ यांचीं मध्यप्रमाणें ६ आणि १२ हीं दोन आहेत.

तिसरें कृत्य.

कोणते ही २ संख्यांचीं हावीं तितकीं भूमिति मध्यप्रमाणें काढावयाचें.

मोठी संख्या लाहान संख्येनें भागावी; नंतर मध्यप्रमाणें जितकीं हवीं ती संख्याएकाधिक करून भागाकारास मूळ प्रकाशक जाणून त्या भागाकाराचें तितकें घात मूळ काढावें. तें गुणोत्तर झालें ह्मणजे एक मध्य प्रमाणा करितां वर्ग मूळ. दोन मध्य प्रमाणा करितां घनमूळ. तीन मध्यप्रमाणा करितां चतुर्घात मूळ. याप्रमाणें पुढें ही. नंतर लाहान पद त्या गुणोत्तरानें पुनः पुनः गुणावें, अथवा मोठें पद पुनः पुनः भागावें. ह्मणजे तितकीं मध्यप्रमाणें निघतील.

उदाहरण.

३ आणि ९६ या दोन संख्यांचीं चारि मध्यप्रमाणें काढावीं.

आतां ९६ ÷ ३ = ३२. याचें पंचघात मूळ. २. तें गुणोत्तर झालें.

तेव्हां ३ + २ = ६. आणि ६ + २ = १२. आणि १२ + २ = २४. आणि २४ + २ = ४८

अथवा ९६ ÷ २ = ४८. आणि ४८ ÷ २ = २४ आणि २४ ÷ २ = १२. आणि १२ ÷ २ = ६ ह्मणजे ६, १२, २४, ४८. हीं चार ३ आणि ९६ यांचीं इच्छितां भूमिति मध्यप्रमाणें आहेत.

सर्कत.

सर्कत ह्मणजे एक रीती आहे, जीणें कोणतीही रास अथवा अवयवी हावें तितके भागांत भागतां येईल, जे भाग परस्परांत कोणतेंही सांगितलें प्रमाण ठेवतील.

या रीतीनें व्यवहारांत भाग्यांचा लाभ अथवा हानि किंवा अप यथास्थित जुळवितात. अथवा दिवाळ्यानें ऋण आणि धन याची व्यवस्था करितात; अथवा उद्यंत

किंवा दुसरे कोणते कामांत बहुत मनुष्यांनी एकत्र मिळून जें कांहीं मिळविलें, त्याचे भाग करितात; अथवा, एकादी भूमि बहुकाळ पडित आहे ती थोडे गांवांस लागवडीकरितां वांटून देणें तर त्या त्या गांवीं मनुष्य समुदाय पाहून त्यांस वांटून देतात;

सर्कत. एकेरी आणि दुहेरी ऐशी दोन प्रकारची आहे. जेव्हां प्रत्येक भाग केवळ कोणतेही एक संख्येशीं प्रमाणांत आहेत, ह्मणजे भाग्यांचे भाग एकच वेळेस कामांत लाविले आहेत, तेव्हां एकेरी; आणि जेव्हां प्रत्येक भाग दोन किंवा अधिक संख्यांशीं प्रमाणांत आहेत, म्हणजे भाग्यांचे भाग भिन्न भिन्न वेळेस कामांत लाविले आहेत, तेव्हां दुहेरी.

एकेरीसर्कत.

सामान्यरीति.

ज्या संख्या भागांचें वेगळालें प्रमाण दाखवितात, त्यांची बेरीज घ्यावी, नंतर या प्रमाणें राशी सांगाव्या.

जशी भागांचे प्रमाणसंख्यांची बेरीज ... वांटाव याचे सर्व राशीस होते.

तशी एक एक भागाची प्रमाण संख्या ..... त्या त्या संख्येचे वांट्यास होईल.

अथवा, ... जसें सगळें भांडवल.

सगळे लाभास अथवा हानीस होतें .... तसें एकेकाचें विशेष भांडवल.

लाभ किंवा हानि याचें त्यात्या विशेष भागास होईल.

ताळा पाहाया साठीं सर्व विशेष भागांची बेरीज घ्यावी, ती सांगितले वांटायाचे सगळे संख्येचे बरोबर आली ह्मणजे खरी.

उदाहरणें.

प्रथम, २४० या संख्येचे तीन भाग कर, असे कीं १, २, ३, या संख्या परस्पर प्रमाणांत आहेत, तसेंते परस्पर प्रमाणांत होतील.

एथें, १ + २ + ३ = ६, ही प्रमाण संख्यांची बेरीज.

तर जसें, ६ : २४० : : १ : ४० प्रथम भाग.

आणि जसें, ६ : २४० : : २ : ८० दुसरा भाग.

आणि जसें, ६ : २४० : : ३ : १२० तिसरा भाग.

सर्वांची बेरीज २४० ताळा.

दुसरें, तीन मनुष्यानीं दुसऱ्या बंदरीं नेण्या करितां एके जाहाजावर ३४० खंडी धान्य भरिलें; त्या मनुष्यांचीं नावें, अ. ब. क; त्यांत अ, ११० खंडी, आणि ब ९७ खंडी व बाकी राहिलेंतें क; पुढें तें जहाज हाकारून चालिलें. तों समुद्रांत तुफान जाहालें, तेव्हां

८५ खंडी धान्य टाकावें लागलें, तो तोटा त्या तिघांस बरोबर वांटतां कोणास किती येईल.

एथें. ११०+९७ = २०७ खंडी. अ. आणि ब. यानीं भरिलें; याजकरितां. ३४०−२०७ = १३३ खंडी, क. यानें भरिलें.

याजवरून जसें ३४० : ८५ : : ११०

अथवा जसें, ४ : १ : : ११० : २७ १/२ खंडी = अ. ची हानि.

आणि जसें. ४ : १ : : ९७ : २४ १/४ खंडी = ब. ची हानि.

आणि जसें. ४ : १ : : १३३ : ३३ १/४ खंडी = क. ची हानि.

सर्वांची बेरीज ८५ खंडी, ताळा.

तिसरें, दोन सावकार. क. आणि ब. यानीं मिळून १२०० रुपयांचें भांडवल केलें, त्यांत २५० रुपये क. चे. बाकी ब. चे, पुढें व्यापार करितां ५०० रुपये लाभ झाला; तो त्या दोघांस भागाप्रमाणें बरोबर वांटून दे.

उत्तर क = रु. १०४ -- पा. २ आणि ब = रु. ३९५ -- पा. २.

चवथें. तिघे सावकार, अ, प, ग. यानीं मिळून ७००० रुपये भांडवल केलें; त्यांत १२३० रुपये अ. चे, ३५७० रु. प. चे बाकी रुपये. ग. चे; पुढें व्यापार करतां १२५५ रुपये लाभ झाला; तो एक एकास भाग प्रमाणें बरोबर वांटून दे.

		रु.	पा.	रे.	
उत्तर.	अ =	२२०	०	६०	६०००/७०००
	प =	६४०	३	५१	१०००/१०००
	ग =	३९३	२	८४	२०००/७०००

पांचवें. चार गांव मिळून महसूलाचा ठराव ७००० रुपये केला त्यांत लागवड-जमीन एक गांवांत २५० बिघे आहे, व एक गांवांत ३५० बिघे आहे, व एक गांवांत ४०० बिघे आहे, व एक गांवांत ५०० बिघे आहे; तर त्यांस कोणाने गांवांस बिघेप्रमाणें किती रुपये महसूल देणें पडेल तो सांग.

	बि.	रु.	पा.	रे.	
उत्तर,	२५० =	११६६	२	६६	१०००/१५००
	३५० =	१६३३	१	३३	५००/१५००
	४०० =	१८६६	२	६६	१०००/१५००
	५०० =	२३३३	१	३३	५००/१५००
		७०००			

साहावें. बहुकाळ पडित भूमि ३७ बिघे, २ पां. ३ काठ्या. अशी तीन गांवांस लगत मध्यें आहे, ती त्या तीन मोठ्या गांवांस वस्तीप्रमाणें वांटून द्यावी, म्हणून सरकारची आज्ञा. त्यास वस्ती एके गांवांत २०० मनुष्यें, एके गांवांत ३२०, एके गांवांत ७५,

या प्रमाणें आहे; तेव्हां कोणते गांवास किती भूमिविभाग येईल तो सांग.

उत्तर,
	म.
५.५० =	२० ७३००४४६०
३२० =	१३ १६.७४८६०
७५ =	३ १० ११६७०

सातवें. कोणी एक मनुष्याकडे चार सावकारांचें कर्ज होतें. त्यांत क.चें ५७७ रु.त्या, ख.चें, १००१ रु. त्या ग.चें, २२५ रु. घ.चें, ७३० रु. पुढें तो पळून गेला, तेव्हां त्याचें यत्किंचित् सामान त्या सावकारांनीं जमकरून विकविलें, त्याचे १०१० रुपये आले, ते त्या सावकारांस दामाशाई प्रमाणें वांटून द्यावयाचे. तेव्हां कोण त्यास किती रुपये वांटा आला तो सांग.

उत्तर.
३७२.१२	क. चा भाग.
७०६.२४	ख. चा भाग.
१४६.९	ग. चा भाग.
४७६.७	घ. चा भाग.

आठवें, माल सुद्धां ९००० रु. किमतीचें एक गलबत तुफान होऊन समुद्रांत बुडालें; त्यांत त्रिभाग र.चा १/२ ल.चा १/४ बाकी ब.चा; त्या गलबताचा विमा ५४०० रुपये केला होता. ते येतील परंतु मूळ किमतींत जी खोट आली ती कोणावर किती या लागी तें सांग.

उत्तर.
रु.	
४५००	र
९००	ल
२२५०	ब

नववें, प. फ. ब. भ, ऐसे चार मनुष्य यानीं कोणें कामांत २५० रु. खर्च केला, त्याचा करार या प्रमाणें, प १/२ फ १/३ ब १/४ भ १/५, केला होता; पुढें तो खर्च वांटून घेणें आहे. तेव्हां कोण कोणास किती किती वांटा आला तो सांग.

उत्तर.
रु.	पा.	दे.	
९७	१	६ ३३/७७	प.चे भागास.
६४	१	७४ ६६/७७	फ.चे भागास.
४८	२	८० २२/७७	ब.चे भागास.
३८	३	८४ ३३/७७	भ.चे भागास.

दाहावें. कोण एक किल्ला सांभाळावया करितां हुजुरून पांच जमाती रवाना केल्या होत्या; त्यांत लोक भरणा एके जमातींत ५४, दुसरे जमातींत ५१. तिसरे. ४८ चवथे ३८, पांचवे ३६, या प्रमाणें होता; पुढें त्या किल्याचे चौकीस दरमहास ७६ मनुष्यें लागतात. तेव्हां दरमहास जमातीचे लोक भरण्या प्रमाणें कोणते जमातीनें किती किती मनुष्यें द्यावीं तें सांग.

उत्तर,
- ५४ चे जमातींतील मनुष्यें १८
- ५१ ....१७
- ४८ ....१६
- ३३ ....११
- ३६ ....१२

दुहेरीसर्कत.

दुहेरी सर्कत, बरसो गित त्याप्रमाणें अशा प्रकारांत आणवते जेथें भाग्यां चीं भांडवलें भिन्नभिन्न वेळेस कामांत लाविली आहेत.

रीति.* प्रत्येक मनुष्याचें भांडवल त्यांचे त्यांचे कामांत लागलें काळानें गुणावें; नंतर तो गुणाकार प्रमाणानें भागावा जसें एकेरी सर्कतेंत सांगितलें आहे, ह्मणजे या प्रमाणें रीती होतील.

जसें सर्व गुणाकारांची बेरीज.

सर्व लाभ किंवा हानि किंवा दोन्ही यांचा भरपाई यास आहे.

तसें प्रत्येक विशेष भागाकार.

त्याचे त्याचे विशेष भागास होईल.

उदाहरणें.

प्रथम, दो पानी सरकतीनें व्यापार केला. त्यांत भांडवल कचें ५०० रु., त्यास ४ महिनें झाले. आणि गचें ६०० रुपये त्यास ५ महिनें झाले. त्या सर्कत-व्यापारांत नफा २५० रु. झाला; तो दोघांस भागा प्रमाणें कसा वांटून द्यावा तें सांग.

	क.		ग.	
एथें.	५००		६००	
	४		५	
	२०००	+	३०००	= ५०००

तरजसें, ५००० : २५० : : २००० : १०० रु. कचा नफा.

आणि जसें. ५००० : २५० : : ३००० : १५० रु. गचा नफा.

दुसरें. च. आणि ज. यांदोघांनीं एक कुरण घोडीं चारावयाकारितां मक्त्यानें ठरावून घेतलें. मक्ता ५४० रु.; त्या कुरणांत, चचीं २३ घोडीं १७ दिवस चरलीं. आणि जचीं २१ घोडीं २० दिवस चरलीं, मक्त्याचे रुपये दोघांनीं कि-

* यारीतीची सत्यता या प्रमाणें आहे, जेव्हां काळ बरोबर आहेत, तेव्हां एकेरी सर्कतेंत सांगितल्या प्रमाणें स्पष्ट आहे कीं. लाभ किंवा हानि यांचे भाग भांडवलाप्रमाणें आहेत. आणि जेव्हां भांडवलें बरोबर, तेव्हां भाग काळा प्रमाणें होतील; या जकारितां जेव्हां दोन्ही बरोबर नाहींत. तेव्हां भाग दोहोंचे गुणाकारा प्रमाणें निश्चयें होतील.

ती किती द्यावे तें सांग.

		रु.	पा.	रें.
उत्तर.	च.	२३२	३	७०
	ज.	१०७	०	५०

तिसरें. प. फ. ब. या तिघांनीं गाईंचारा यास कुरण घेतलें. त्याचें देणें एक वर्षाचें ३०० रुपये. त्यांत प. च्या ७ गाई ३ महिने. फ. च्या ९ गाई ५ महिने. आणि ब. च्या ४ गाई १२ महिने. या प्रमाणें चरल्या; तर त्या ३०० रु. देणें त्याचा विभाग कोणी किती द्यावा तो सांग.

		रु.	पा.	रें.	
उत्तर.	प	५५	१	५	३०/११२
	फ.	११८	१	६८	८८/११२
	ब.	१२६	१	२६	३६/११२

चवथें. कोणी एक किल्ला फौजेनें हल्ला करून घेतला. ते समयीं तेथें १००००० रुपये मिळाले. ते फौजेंत दरमाहा दर आसामीस २० रुपये असे ४ जमातदार ६ महिने चाकरी करीत होते. दरमाहा दर आसामीस १५ रुपये असे १२ हवालदार ६ महिने चाकरी करीत होते, व दरमाहा दर आसामीस ११ रुपये असे ११० शिपाई ३ महिने चाकरीत होते; पुढें सरकारचा हुकूम झाल्यावरी, ते रु. त्या फौजेस आसामी तैनात चाकरीची मुदत यांच्या प्रमाणें वांटून द्यावे म्हणून; त्यास कोणा कोणास किती येतात ते सांग.

	रु.	पा.	रें.		
उत्तर.	१२४	२	४२	१०२०/५११०	जमातदार आसामी ४ त्यांचा वांटा.
	२०८०	२	६१	८०००/५११०	हवालदार आसामी १२ त्यांचा वांटा.
	६११४	०	८०	[illegible]/५११०	शिपाई आसामी ११० त्यांचा वांटा.

पांचवें. चैत्र शुद्ध प्रतिपदेस, १०००० रुपये भांडवल करून, ह. नें व्यापार आरंभिला; नंतर ज्येष्ठ शुद्ध प्रतिपदेस त्या व्यापारांत १५००० रुपये भांडवल देऊन क. सर्कती मिळाला; नंतर भाद्रपद शुद्ध प्रतिपदेस त्याच व्यापारांत २०००० रुपये भांडवल देऊन, ग. सर्कती झाला; या प्रमाणें तिघांचा सर्कती व्यापार चालला; पुढें वर्षांती हिशेब करितां १७२६५ रुपये नफा झाला, तो भाग प्रमाणें तिघांस बरोबर वांटून दे.

		रु.	पा.	रें.	
उत्तर,	ह. चा वांटा.	४५७४	२	७१	११७/२६६
	क. चा वांटा.	५७१८	१	३८	२६/२६६
	ग. चा वांटा.	३४७१	३	८९	१२६/२६६

साहावें. र. ल. च. या तिघांनीं १ वर्ष सर्कतीनें व्यापार केला त्यांत आरंभीं र. नें. ३०० रुपये दिले, पुढें चार महिनें जाऊन २०० रुपये दिले; तसें ल. नें

आरंभीं ३०० रुपये दिले. पुढें ३ महिने गेल्यावर २०० रुप. दिले. नंतर दोनमहिनें गेल्यावर पुनः ४०० रुपये दिले. तसेच व नें आरंभीं ६०० रुपये दिले. पुढें ९ महिनें गेल्यावर १०० रु. दिले. नंतर १ महिना गेल्यावर १०० रु. माघारे घेतले. याप्रमाणें वर्ष पुरें झाल्यानंतर हिशेबीं ५०० रु. नफा झाला. तो तिघांस बरोबर वांटून दे.

		रु.	पा.	रे.	
उत्तर.	रच्या वांटा.	१०२	२	२५	$\frac{१२५}{१५५}$
	लच्या वांटा.	२१०	१	२	$\frac{११०}{१५५}$
	वच्या वांटा	१८७	०	७१	$\frac{१५५}{१५५}$

व्याज.

व्याज म्हणजे पैका उधार देणें किंवा घेणें याजवर वृद्धीचा नियम आहे. जो पैका उधार देतात किंवा घेतात, त्यास मुद्दल म्हणतात; आणि व्याज व मुद्दल यांचे बेरिजेस रास म्हणतात. व्याज शेंकड्याप्रमाणें वर्षावर अथवा महिन्यावर किंवा दिवसावर ठरवितात. परंतु बहुत करून वर्षावरच. त्यास व्याजाचा दर म्हणतात:-

जसें,

जेव्हां व्याज शेंकड्यास ३ आहे, तेव्हां दर ३ चा म्हणतात.
शेंकड्यास ४ आहे. - - ४ चा म्हणतात.
शेंकड्यास ५ आहे - - - ५ चा म्हणतात.
शेंकड्यास ६ आहे - - ६ चा म्हणतात.

व्याज दोन प्रकारचें आहे, सरळ आणि चक्रवाढ

सरळ व्याज तेंच आहे जें झालें मुदतीचें दराप्रमाणें मुद्दलावर मात्र व्याज होतें. कोणतेही पैक्याचें व्याज, कोणतेही वेळेंत, मुद्दल पैका आणि त्याचा काळ यांशीं समप्रमाणांत आहे, याजवरून त्यांचा हिसाब करायास ही पुढील सामान्यरीति उत्पन्न झाली आहे.

जसें १०० रुप. व्याजाचे दरास आहेत तसें कोणतेही सांगितलें मुद्दल त्याच एक नियम काळाचें व्याजास होईल. आणि पुनः

जसें एक नियम काळ. कोणतेही सांगितले काळांस आहे. तसें वर उत्पन्न झालेलें एक नियम काळाचें व्याज सांगितलें सर्व काळाचे व्याजास होईल.

अथवा, १ रुपयाचें एक नियम काळाचें व्याज घेऊन त्यानें सांगितलें मुद्दल गुणावें. आणि तो गुणाकार उधार दिलेले किंवा घेतलेले पैक्याचे नियम काळानें गुणावा. म्हणजे हा गुणाकार त्या काळाचें इच्छिलें व्याज होईल.

पाहा, जेव्हां काळामध्यें वर्षांचे कांहीं अवयव आहेत, जसें अर्धवर्ष, पाववर्ष, महिना, अथवा दिवस तेव्हां त्याचें आज वर्षांचें व्याज भागून होईल, अथवा त्रैराशीरितीनें होईल.

उदाहरणें.

प्रथम, मुद्दल रु. २३०५ याशीं व्याज दरसाल दर शेकडा रु. ४ प्रमाणें १ वर्षाचें व्याज किती रुपये होतील तें सांग.

जसें, १०० : ४ : : २३०५
४

१००) ९२२०.० (९२.२ रु.
९००
०२२०
२००
०२००
२००
०००

.२
४
.८
१००
रेस ८००

रु. पा. रे.
९२ . . ० . . ८० एक वर्षाचें व्याज हें उत्तर.

दुसरें, मुद्दल रुपये ५४७७ . . २ पावले याशीं व्याज दरसाल दर शेकडा रुपये ५ प्रमाणें ३ वर्षांचें व्याज किती रुपये होतील तें सांग.

जसें १०० : ५ : : ५४७७ . ५ :

अथवा २० : १ : : ५४७७ . ५ :

२०) ५४७७ . ५०० (२७३ . ८७५ व्याज १ वर्षाचें.
४०
१४७
१४०
००७७
६०
१७५
१६०
१५०
१४०
०१००
१००

रु. ८२१ . ६२५ तीन वर्षांचें.
४
पा २ . ५००
१००
रे. ५०.०००

रु. पा. रे.
८२१ . . २ . . ५० हें उत्तर.

तिसरें. मुद्दल रु. २१०० याशीं व्याज दरसाल दर शेकडा रु. ४½ प्रमाणें ४ वर्षें ७ मास २५ दिवस, याचें व्याज किती रुपये होतील तें सांग.

जसें. १०० : ४½ : : २१००
४½

१०५००
८४००
१००) ९४५०० (९४ . ५ एक वर्षाचें व्याज
९००
४५०
४००
५००
५००

४
रु. ३७८ . ० चार वर्षांचें.
४७ . २५ साहा मास.
७ . ८७५ एक मास.
६ . ५६२ पंचवीस दिवस

रु. ४३१. ५९७
          ४
पा. २ . ३८८
          १००
रे. ३८ . ८००

अथवा.

जसें. ३६५ : ९४.५ : : २५ :

```
              २५
          ------
           ४७२५
          १८९०
      ----------
३६५)   २३६२.५०० ( ६ ४७२
       २१९०
       ------
        १७२५
        १४६०
       ------
         २६५०
         २५५५
        ------
           ९५०
           ७३०
          -----
           २२०
```

रु. पा. रे.
४३१ २ ३८८ हें उत्तर.

चवथें, मुद्दल ४५०० रुपये यांचें १ वर्षाचें व्याज दर शेंकडा दर साल ५ रु. प्रमाणें किती रु. होतील तें सांग. २२५ रु. हें उत्तर.

पांचवें, मुद्दल ७१५६ रु. १ पा. यांचें १ वर्षाचें व्याज दर शेंकडा दर साल ४ रु. २ पा. प्रमाणें किती रुपये होतील तें सांग. रु. ३२२ . . पा. ० . . रें. १२½ हें उत्तर.

साहावें, मुद्दल ७२०० रुपयांचें ३ वर्षांचें व्याज दर शेंकडा दर साल ५ रुपये प्रमाणें किती होतात तें सांग. १०८० रुपये हें उत्तर

सातवें, मुद्दल ३५५७ रु. २ पावले यांचें ४ वर्षांचें व्याज दर शेंकडा दर साल ४ रु. प्रमाणें किती होतात तें सांग. रु. ५६९ . पा. ० . रे. ८० हें उत्तर.

आठवें, मुद्दल ३२२ रु. २ पा. ८० रे. यांचें दर शेंकडा दर साल ४ रु. १ पा. प्रमाणें किती रु. व्याज जाहालें तें सांग. रु. १३ . पा. २ . रे. ८६ हें उत्तर

नववें, मुद्दल १७०० रु. यांचें १½ दीड वर्षाचें व्याज दर शेंकडा दर साल ५ रु. प्रमाणें किती रु. होतात तें सांग. रु. १२७ . . पा. २ हें उत्तर.

दाहावें, मुद्दल २००० रुपये यांचें व्याज दर शेंकडा दर साल ४ रु. प्रमाणें ¼ पाव वर्षाचें किती रुपये होतील तें सांग. २० रुपये. हें उत्तर.

अकरावें, मुद्दल ३१०० रुपये यांचें ५ ¾ वर्षांचें व्याज दर शेंकडा दर साल ३ रु. ३ पा. प्रमाणें किती रुपये होतात तें सांग. रु. ६६८ . . पा. १ . . रें. ७५ हें उत्तर

बारावें, मुद्दल १७६०० रु. यांचें दर शेंकडा दर साल ४ रु. ३ पा. प्रमाणें ११७ दिवसांचें व्याज किती रु. होतात तें सांग. साल ह्मणजे ३६५ दिवस.
रु. पा. रे. हें उत्तर

चक्रवाढव्याज.

चक्रवाढ व्याज ज्या राही व्याजावर व्याज ह्मणतात तें तेंच आहे, जें जें मुद्दल आणि व्याज प्रत्येक नियम काळाचे अंतीं एकत्र मिळाल्यापासून उत्पन्न होतें.

प्रथमरीति, प्रथमनियमकाळाचे अंतीं सांगितलें मुद्दलाचें व्याज सरळ व्याजाचे रीतीप्रमाणें करावें, नंतर तें व्याज व मुद्दल एकत्र मिळवावें: आणि ती बेरीज नवें मुद्दल जाहलें, नंतर पुनः नियमकाळाचे अंतीं त्या बेरिजेचें व्याज सरळ व्याजाचे रीतीप्रमाणें करावें. आणि तें व्याज वती पूर्वबेरीज पुनः नवें मुद्दल जाहलें, याप्रमाणें प्रति नियम काळाचे अंतीं करीत जावें, म्हणजे चक्रवाढ व्याज होईल.

दुसरीरीति, एकरुपयाचें व्याज प्रथम नियम कालाचे अंतीं काय जाहलें तें काढावें, आणि यास तो मुद्दल १ रु. मिळवावा; नंतर त्याचा घात करावा असाकीं ज्याचा प्रकाशक नियम काळांची संख्या होईल; मग तो घात मुद्दलानें गुणावा, तो गुणाकार रास म्हणजे व्याजासुद्धां मुद्दल झालें. कदाचित् व्याजच हावें तर राशींतमुद्दल वजा करावें, बाकी राहील तें व्याज झालें.

उदाहरणें.

प्रथम, ७२०० रुपये मुद्दल यासी व्याज दरसाल दरशेंकडा पांचाप्रमाणें ४ वर्षांत रास किती होईल तें सांग.

एथें ५ हा १०० याचा २० वा भाग आहे, आणि १ रुपयाचें व्याज एकवर्षांत $\frac{१}{२०}$ आहे, अथवा .०५, आणि त्याची रास १.०५ आहे याजकरितां.

प्रथमरीतीप्रमाणें.

	रु.	पा.	रे.	
२०)	७२००	०	०	प्रथमवर्षाचें मुद्दल
	३६०	०	०	प्रथम वर्षाचें व्याज
	रु.	पा.	रे.	
२०)	७५६०	०	०	दुसरे वर्षाचें मुद्दल.
	३७८	०	०	दुसरे वर्षाचें व्याज
२०)	७९३८	०	०	तिसरे वर्षाचे मुद्दल.
	३९६	३	६०	तिसरे वर्षाचें व्याज.
२०)	८३३४	३	६०	चवथेवर्षाचें मुद्दल.
	४१६	२	९५	चवथे वर्षाचें व्याज.
	८७५१	२	५५	रास किंवा इच्छिलें उत्तर

रु.	पा.	रे.	
८७५१	२	५५	हें उत्तर.

दुसरेरीतीप्रमाणें.

१·०५ एकरुपयाचीरास
१·०५
१·१०२५ वर्ग.
१·१०२५
१·२१५५०६२५ चतुर्घात.
७२००
२४३१०१२५०००
८५०८५४३७५००
रु· ८७५१·६८७५
४
पा· २·८९००
१००
रें ५८,०००
रु. पा. रे.
रास.८७५१··२· ५८ हें उत्तर.

दुसरें. ५०० रुपये मुद्दलव्याज दरसाल दरशेंकडा पांचाचाप्रमाणें वर्षे ५ झालीं रासकाय होईल तें सांग
रु· पा· रें·
उत्तर, ६३८··०··५६

तिसरें. ५०० रुपये मुद्दल व्याज वर प्रमाणें वर्षे ५ झालीं. परंतु मुदत अर्ध अर्ध वर्षाची तेव्हां १० मुदती झाल्या त्याची रास काय होईल तेंसांग.
रु. पा. रे.
उत्तर, ६४० · · ० · ·१६·९५०८.

चवथें, उदाहरण पूर्वीचेंच मुदत तीन महिन्याची. तेव्हां २० मुदतीझाल्या व्याज काय होईल तें सांग.
रु. पा. रे.
उत्तर, ६४१ · · ० · · ७·४४५२

पांचवें, ३००० रु· मुद्दल. वर्षे ६ झालीं दरसाल दरशेंकडा व्याज ४ रु· प्रमाणें रास काय होईल तें सांग.
रु. पा. रे
उत्तर, ४६८१ · २ ७३·१४.

साहावें. ८१०० रु· मुद्दल वर्षे २ ½ झालीं दरसाल दरशेंकडा व्याज ४½ रुपयेप्रमाणें मुदत ½ वर्षाची रास काय होईलतें सांग.
रु. पा. रे.
उत्तर, १०५३ · · ० · · ७५·७२४०२५

सातवें २१७० रु· मुद्दल वर्षे २ ¾ झालीं दरसाल दरशेंकडा व्याज ५ रु· प्रमाणें मुदत ¼ पाव वर्षाची रास काय होईल तें सांग.
रु. पा. रे.
उत्तर, २४१७ · · ० · · २·७०४.

मिश्रगणित.

मिश्रगणित म्हणजे वेगळाले जातीचे शब्द पदार्थ एकत्र मिश्रकेले, असें कीं, त्या मिश्राची किंमत त्यांचे वेगळाले किंमतीचे मध्ये होईल, तेव्हांत्या

रीति दोन आहेत. एक मध्यमिश्रगणित आणि दुसरें व्युत्क्रम मिश्रगणित.

मध्यमिश्रगणित.

मध्यमिश्रगणित ह्मणजे मिश्रपदार्थांचा दर काढायाची रीति आहे, जेव्हां प्रत्येक शुद्ध पदार्थांचे दर आणि परिमाणें सांगितलीं आहेत.

रीति.

* प्रत्येक शुद्धपदार्थांची परिमाणें त्यांचे त्यांचे दरानें वेगळालीं गुणावीं; नंतर या सर्व गुणाकारांची बेरीज घ्यावी; आणि दुसरी शुद्धपदार्थांचे परिमाणाची बेरीज घ्यावी; नंतर प्रथम बेरीज दुसरे बेरिजेनें भागावी, म्हणजे गुणाकारांची बेरीज परिमाणांचे बेरिजेनें भागावी, भागाकार येईल तो त्या मिश्रराशिचा इच्छिला दरपरिमाण भाव होईल.

उदाहरणें.

प्रथम, तीन जातींची शरकर एकत्र मिळून मिश्रराशि झाली आहे. त्यांत ५० शेर दरशेरीं १२ पैसे दरांची, तसें ४४ शेर दरशेरीं ९ पैसे दराची, आणि २६ शेर दरशेरीं ८ पैसे दराची, असे वेगळाले भाव होते. आतां त्या मिश्रराशीस दरशेरीं काय भाव होईल.

आतां ५०, ४४, २६ हें परिमाण आहे, तर,

५० + १२ = ६००
४४ + ९ = ३९६
२६ + ८ = २०८
१२०) १२०४ (१० $\frac{४}{१२०}$ = १० $\frac{१}{३०}$

आणि १२, ९, ८, हा भाव आहे.

उत्तर १० $\frac{१}{३०}$ पैसे हा मिश्रराशीचा दरशेरीं भाव.

दुसरें, एक चाहा पौंड ५ दरपौंडीं भाव ७ शिलिंग, दुसरा चाहा पौंड ९ दर ८ शिलिंग ६ पेन्स, आणि तिसरा चाहा पौंड १४ $\frac{१}{२}$ दर ५ शिलिंग १० पेन्स प्रमाणें असा तीन प्रकारचा एकत्र केला तर त्या मिश्रास दरपौंडीं भाव काय होईल.

उत्तर, ६ शिलिंग १० $\frac{१}{२}$ पेन्स.

---

* प्रतिपाद्य या रीतीची सत्यता बीजगणितापासून या उदिला प्रमाणें निघते.

अ, ब, क, हीं तीन अक्षर चिन्हें वस्तूंचीं वेगळालीं परिमाणें दाखवायास घे.

आणि म, न, प, हीं तीन अक्षर चिन्हें त्यांचे प्रत्येकीं दर दाखवायास घे.

तर अम, बन, कप, हे त्या तीन राशींचे वेगळाले भाव आहेत

आणि अम + बन + कप, ही त्या वेगळाले तीन राशींचे भावांची बेरीज आहे,

पुनः अ + ब + क ही त्या तीन राशींचे वेगळाले परिमाणाची बेरीज आहे.

आतां जर र, सर्व मिश्रराशींचा भाव दाखविता.

तर (अ + ब + क) + र, ही सर्व मिश्रराशींची किंमत होईल

याजकरितां (अ + ब + क) + र, = अम + बन + कप.

आणि र = अम + बन + कप म्हणजे रीति खरी आहे
अ + ब + क.

तिसरें, एक जातीचें तेल ग्यालन ४ दर ग्यालनीं भाव ४ शि. १० पे. दुसरें तेल ग्यालन ७ दर ५ शि. १ पेन्स आणि तिसरें तेल ग्यालन ९ ३/४ दर ५ शिल्लिंग ८ पेन्स प्रमाणे असें एकत्र केलें तर त्या मिश्रास दर ग्यालनी भाव काय होईल. उत्तर, ५ शिल्लिंग ४ १/२ पेन्स.

चवथें, कोणी फळ्यानें एक जातीचे गहुं १० बुशिल दर बुशिलीं भाव ५ शिल्लिंग, दुसरें गहुं १८ बुशिल दर ३ शिल्लिंग, आणि तिसरें गहुं २० बुशिल दर २ शिल्लिंग प्रमाणें असे एकत्र केलें तर त्या मिश्रास दर बुशिलीं भाव काय होईल.
उत्तर, ३ शिल्लिंग.

पांचवें. कोणी दुकानदारानें एक जातीचें पीठ बुशिल ३ दर बुशिलीं भाव ३ शिल्लिंग ५ पेन्स तसें दुसरे जातीचें बुशिल ४ दर ५ शिल्लिंग ६ पेन्स, आणि तिसरे जातीचें बुशिल ५ दर ४ शिल्लिंग ८ पेन्स प्रमाणें असें एकत्र करून विकूं लागला तर त्या मिश्र राशीस दर बुशिलीं काय भाव होईल.
उत्तर ४ शिल्लिंग ७ १/२ पेन्स.

साहावें, सोनें ७ औंस २२ क्यारेक्ट[∴] चांगलें, तसें १२ १/२ औंस २१ क्यारेक्ट चांगलें, आणि १७ औंस १९ क्यारेक्ट चांगलें, असें एकत्र आटिलें तर त्या मिश्र सोन्यास किती क्यारेक्ट चांगलें भाव लागेल. उत्तर, २० ३/४ क्यारेकट चांगलें.

सातवें, रुपें, १ पौंड ० औंस[+] शुद्ध तसें ५ पौंड ० औंस यांत १० औंस शुद्ध आणि १ पौंड १० औंस हीण असें एकत्र आटिलें तर त्या मिश्रास किती औंस शुद्ध भाव लागेल.
उत्तर, ७ ६/७ औंस शुद्ध.

आठवें, तीन जातींचें तूप मण ५, ९, १४, १/२ दर मणीं भाव रुपये १०, ९, १/२ ८, १/२ असें एकत्र केलें त्या मिश्रास दर मणीं किती रुपये पडतील. उत्तर, ९ रुपये.

नववें, तीन जातींचें दुध शेर ४, ७, ९, ३/४ दर शेरीं पैसे ६, ५, ४, १/२

∴ जर १ औंस अथवा दुसरे कोणतेंही सोन्याचें परिमाण भर शुद्ध सोनें आहे, तर त्याचे बरोबर २४ भाग केले, त्यांस प्रत्येकीं क्यारेक्ट म्हणतात, जसें रुप्याचे भागास औंस म्हणतात परंतु बहुत करून सोनें रुपें यांत दुसरे हीन धातूंचा मिश्र असतात, ज्यास हीण म्हणतात आणि या मिश्र सोन्यास इतके क्यारेक्ट सोनें म्हणतात, जितकें मिश्रांत शुद्ध सोनें आहे

जसें, जर २२ क्यारेक्ट शुद्ध सोनें आणि दोन क्यारेक्ट हीण एकत्र मिळविलें तर या मिश्रास २२ क्यारेक्ट शुद्ध सोनें म्हणतात

जर मिश्रांत मिळाले वेगळाले पदार्थांत एक हीण दुसरे शुद्ध त्यांत मिळाला आहे, तर तो हीन पदार्थ अति हलका म्हणून त्याचा भाव शून्य गणितात

जसा पाण्याचा भाव शून्य होतो, जे दुधांत मिश्रित झालें, तसा हीणाचा भाव शून्य होतो, जे कांहीं सोनें रुपें इत्यादिक उत्तम धातूस मिश्रित झालें.

असें एकत्र केलें त्या मिश्रास दरशेरीं किती पैसे पडतील.

उत्तर, पै. ४ . . रे. ७$\frac{}{६}$.

दाहावें, एक फड्यानें तीनप्रकारचे गहुं मण १०, १८, २०, दरमणीं रुपये ५, ३, २ या भावाचे एकत्र केलेतर त्या मिश्रराशीस दरमणीं किती रुपये पडतील.

उत्तर, ३ रुपये.

अकरावें, कोणी दुकानदारानें ३ जातीचें पीठ मण ३, ४, ५, दरमणी रुपये ३$\frac{३}{४}$, ३, २$\frac{१}{२}$ या दरानें एकत्र केलेंतर त्या मिश्रास दरमणीं किती रु. पडतील.

उत्तर, रु. ३ . पा. २ . . रे. ९$\frac{१}{६}$

बारावें, सोनें तोळे ७, १२$\frac{१}{२}$, १७ त्याचे अनुक्रमें कस ९८, ९६, ९४ असें एकत्र आटिलें तर त्या मिश्रास कस काय लागेल. उत्तर, ९५$\frac{५}{२}$ कस.

तेरावें, सोनें तोळे २१, ३२, ३१$\frac{१}{२}$ त्यास कस ९८, ९६, ९५, असें एकत्र आटिलें तर त्या मिश्रास कस काय लागेल. उत्तर, ९६$\frac{१}{२}$ कस.

व्युत्क्रममिश्रगणित.

व्युत्क्रम मिश्रगणित म्हणजे अनेक सांगितले भावाचे अनेक शुद्ध पदार्थ एकत्र मिश्र केले. तर त्या मिश्रास सांगितला भाव व्हावा, ते व्हां मिश्र करायास कोणते भावाचे पदार्थ किती किती परिमाणानें घ्यावे. ते काढायाचीरीति आहे, ही रीति मध्य मिश्र रीतीचें उलट आहे, म्हणून याचा ताळा मध्य मिश्ररीतीनें निघतो.

प्रथमरीति.+

\+ सिद्धांत, उणा भाव अधिक भावास जोडून आणि त्याचा प्रत्येकीं इच्छिले भावाशीं वजाबाक्या त्या त्या भावासमोर व्युत्क्रमानें लिहून जें परिमाण निघतें, तें असें आहेकीं उणेभावाचे परिमाणावर जितका नफा येतो तितकाच अधिक भावाचें परिमाणावर तोटा आहे, याजकरितां सर्वपरिमाणावर नफा तोटा होईल, तो बरोबर, हा तर इच्छिला भाव आहे, याचप्रमाणें अनेक शुद्धपदार्थ मिश्र केले तरीही जाणावें.

यारीतीनें किती ही शुद्धपदार्थ किती एक शुद्ध पदार्थांशीं जोडिले असतील म्हणजे सर्वदा इष्ट भावाहून उणे असतील ते अधिकाशीं जोडिले जातील, तरीही प्रत्येक युग्मांचा नफा तोटा पूर्वप्रमाणें बरोबरे होईल, आणि याजकरितां सगळ्याचा नफा तोटा बरोबर होईल. हें सिद्ध.

या रीतीपासून कळतेंकीं या जातीचे प्रश्नांस अनेक उत्तरें निघतील कारण, एक उत्तर काढिल्या नंतर इच्छे प्रमाणें हावींतितकीं या रीतीनें निघतील. ती रीती, वेगळाले काढिले परिमाणांस २ किंवा ३ अथवा ४ इत्यादिकानें गुणून किंवा भागून. याचें कारण उघड आहे, जर दोन शुद्ध पदार्थांचीं परिमाणें मध्यभावाशीं नफा तोटा बरोबर करितील, तर त्याचें दुपटीशीं ही किंवा तिपटीशीं ही, या प्रमाणें अनंत पट पर्यंत.

२१	१६	३
	१८	२
	२२	३
	२५	५

या जातीचे प्रश्नास बीजगणित जाणणार अनंतरूप म्हणतात, आणि ज्या पासून जितकीं उत्तरे निघतील तितकीं काढायाचा सिद्धांत बीजगणित रीतीनें करितां येतो.

शुद्ध पदार्थांचे भाव एकाखालीं एकयेतील असे लिहावे = २ इच्छिलें मिश्रभावा हून जे शुद्ध पदार्थांचे भाव उणे असतील त्यांस प्रत्येकीं मिश्र भावाहून अधिक असतील त्याशीं अखंड रेषा करून जोडावें. आणि याच रीतीनें प्रत्येक अधिकास प्रत्येक उण्याशीं मिळवावें; — ३ मिश्रभाव आणि प्रत्येक शुद्धभाव यांच्या वजाबाक्या ह्मणजे अंतरें तीं शुद्धभाव ज्याशीं जसे मिळविले आहेत, त्यांचे त्यांचे समोर लिहावीं, नंतर एकच वजाबाकी त्या भावाचे समोर आली तर तीच त्या राशीचें परिमाण होईल. आणि अनेक वजाबाक्या आल्या तर त्यांची बेरीज त्या राशीचें परिमाण होईल.

प्रत्येक उदाहरणाचा ताळा मध्य मिश्ररीतीनें निघतो.

उदाहरणें.

प्रथम, कोणी एक सावकार १६, १८, २२, रुपये खंडी असे तीन जातीचे चणे वेगळाले किती किती परिमाणानें घ्यावे ह्मणजे मिश्रराशीस इच्छिला भाव पडेल.

रु० २० { १६, १८, २२ }

२ खंडी १६चे भावाचे. तर २+१६=३२

२ खंडी १८चे भावाचे. २+१८=३६

४+२=६ खंडी २२चे भावाचे. ६+२२=१३२

खंडी १० रु. २००

याचा ताळा मध्यमिश्ररीतीनें.

२, २, ६ खंडी हीं परिमाणें.

१६, १८, २२ रुपये हे भाव.

दुसरें, कोणी दुकानदार ४ आणि ६ रुपये मण असें दोन भावांचे तेल मिश्र करून ५ रुपये मण या भावानें विकायास इच्छितो. तर त्यानें मिश्र करायास दोन जातींचें तेल प्रत्येकीं किती किती परिमाणानें घ्यावें.
उत्तर, १ खंडी मण किंवा शेर.

तिसरें, कोणी दुकानदार ४, ६, ११ पैसे शेर असे तीन भावांची साखर एकत्र मिश्र करून ७ पैसे शेर या भावानें विकायास इच्छितो तर त्यानें मिश्र करायास प्रत्येक भावाची साखर किती किती परिमाणानें घ्यावी.
उत्तर, १ शेर किंवा मण किंवा खंडी.

चवथें, कोणी दुकानदार दर बुशिल २ शिलिंग ६ पे० ३ शि० ८ पे० ४ शि० आणि ४ शिलिंग, ८ पेन्स. असे चार भावाचे गहूं एकत्र मिश्र करून दर बुशिल ३ शिलिंग १ पेन्स. या भावानें विकायास इच्छितो. तर त्यानें मिश्र करायास कोणकोणते गहूं किती किती परिमाणानें घ्यावे.
उत्तर, २ शि० ६ पे० या दराचे २ बु० ३ शि० ८ पे० या दराचे २ बु० ४ शि०, या० चे ३ बु०, आणि ४ शि० ८ पे० या० चे ३ बुशिल.

पांचवें, कोणी सोनार, १६, १८, २२, २४ क्यारेकूट चांगलें या दरांचे सोनें एकत्र आटून मिश्रसोनें २१ क्यारेकूट चांगलें करायास इच्छितो तर त्यानें कोणकोणतें सोनें किती किती परिमाणानें घ्यावें.

उत्तर, १६ क्यारेकूटचें ३ भाग १८चें ३ भाग, २२चें ५ भाग, आणि २४चें ५ भाग.

साहावें, कोणी दुकानदार मध १२ रु. मण, राब १० रु. मण, काकवी १ रुप. मण आणि पाणी ० रुपये मण, अशीं एकत्र मिश्र करून त्या मिश्रास दरमणीं ८ रुपयांचा भाव व्हावा असें इच्छितो तर त्यानें प्रत्येक कायकाय परिमाणानें घ्यावीं.

उत्तर, मध १५ राब १५ काकवी ६ आणि पाणी ६ मण.

दुसरी रीति.

जेव्हां मिश्राचें परिमाण सांगितलें आहे, पूर्वी सांगितले जोडण्याचे रीतीनें करून उत्तर काढावें नंतर या प्रमाणें प्रमाण राशी कराव्या, जशी परिमाणांची बेरीज : सांगितले परिमाणास आहे : : तसें जोडण्यांचे रीतीनें काढिलेले शब्द पदार्थ : प्रत्येकांचे इच्छिले परिमाणास होतील.

प्रथम, १५, १७, १८, २२ क्यारेकूट चांगलें एकत्र आटायाचें आहे, असें कीं, तें मिश्र ४० तोळे २० क्यारेकट चांगलें होईल, तर वेगळालें त्यात्याजातीचें किती तोळे घ्यावें.

आतां २०	१५		२	जसें १६ : ४० : : २ : ५
	१७		२	१६ : ४० : : २ : ५
	१८		२	१६ : ४० : : २ : ५
	२२	५+३+२=१०		१६ : ४० : : २ : २५
		१६		

उत्तर, १५चें ५, १७चें ५, आणि २२चे २५, तोळे.*

---

* यास्थळीं धातूचे स्वभावावर अनेक प्रश्न सांगतां येतील. परंतु त्यांतून बहुचमत्कारीक एकच प्रश्न पुरे. हैरो यानामें सैराक्युसचा पातशाह होता. त्यानें, सगळा शुद्ध सोन्याचा मुकुट सोनाराजवळ करायास सांगितला, नंतर, तो त्यानें करून आणि त्यावर त्यांत कांहीं रुपें किंवा तांबें मिश्र केलें असें नजरेस आलें. परंतु तें कितीयाचा निश्चय व्हावा म्हणून आर्किमीटीज यानामें एक चतुरपुरुष अतिप्रसिद्ध तोही तेथें होता. तेव्हां त्या मुकुटांतील हिणाचें परिमाण काढायास तो त्या चतुर पुरुषाजवळ दिल्हा उटें.

त्यानें एक शुद्ध सोन्याची एक तांबें किंवा रुपेंयाची याप्रमाणें दोन भरींव आकृती करून त्या पाण्यानें तोंडपर्यंत भरलेले पात्रांत पर्यायानें बुडविल्या, नंतर त्या आकृतींच्यायोगें पात्रांतून बाहेर पडलें पाण्याचीं तोळें केल्यापासून त्या भरींव आकृतीचें त्वभार त्यास विदित झाले म्हणजे या पासून आणि त्या प्रत्येकांचे सांगितले वजनापासून त्या मुकुटांत शुद्ध सोनें आणि हीण किती होतें त्याचें परिमाण काढितां आलें.

आतां कल्पना कर कीं, त्या भरींव आकृति व मुकुट यांचें प्रत्येक वजन १० शेर आहे आणि शुद्ध रुपें किंवा तांबें यांचें भरींवाकृति मुकुटामुळें पात्रांतून बाहेर पडले पाणी १२ शेर आणि शुद्ध सोन्याचें भरींवाकृति मुकुटामुळें पात्रांतून बाहेर पडलें पाणी ५२ शेर, आणि त्या मिश्र सोन्याचे मुकुटामुळें पात्रांतून बा

दुसरें, ४, ५, ६, ८ रुपये मण याचार भावांचे तंदुळ एकत्रमिश्र करून ते २० मण ७ रुपयांचे भावानें विकावयास इच्छितो, तर ते वेगळाले किती किती मण घ्यावे.

उत्तर, ४चे २ $\frac{२}{३}$, ५चे २ $\frac{२}{३}$, ६चे २ $\frac{२}{३}$ आणि ८चे १३ $\frac{१}{३}$ मण.

तिसरीरीति.

जेव्हां एक शुद्ध पदार्थाचें परिमाण अमुक असावें ह्मणून सांगितलें आहे, तर पूर्व रीती प्रमाणें प्रत्येक पदार्थाचे भावांच्या दरभावाशीं वजाबाक्या कराव्या. नंतर या प्रमाणें राशी कराव्या, जसें सांगितलें परिमाणाचे शुद्ध पदार्थाची वजाबाकी : दुसरे वेगळे वेगळे वजाबाक्यांस होतें : : तसें सांगितलें परिमाण : वेगळे वेगळे इच्छिलें परिमाणास होईल.

उदाहरणें.

प्रथम, दर ग्यालन ४ शिलिंग, दर ग्यालन ५ शिलिंग दर ग्यालन ५ शिलिंग ६ पेन्स, आणि दर ग्यालन ६ शिलिंग असे ४ जातीचे पदार्थ मिश्र करायाचे त्यांत प्रथम ४ शिलिंग दराचा पदार्थ ३ ग्यालन घालणें आहे, आणि मिश्रास दर ग्यालनीं ५ शिलिंग ४ पेन्स असा भाव व्हावा तर प्रत्येकांचें परिमाण किती किती घ्यावें.

आतां ६४	४८	२ + ८ = १०	तर जसें १० : १० : : ३ : ३ ग्या.
	६०	२ + ८ = १०	१० : १० : : ३ : ३ ग्या.
	६६	१६ + ४ = २०	१० : २० : : ३ : ६ ग्या.
	७२	१६ + ४ = २०	१० : २० : : ३ : ६ ग्या.

उत्तर, ५ शिलिंगचे ३ ग्यालन, ५ शिलिंग ६ पेन्सचे ६ ग्याल०, ६ शिलिंगचे ६ ग्यालन.

दुसरें, कोणी एक वाणी १२, १०, ६, ४ रुपये खंडी दराचे दाणे एकत्रमिश्र करायास इच्छितो. परंतु त्यांत शेवटील ४ रुपये खंडी दराचे २० खंडी घालायाचे आहेत, आणि त्या मिश्रास ८ रुपये खंडी असा भाव व्हावा तर त्यानें प्रत्येक भावाचें किती किती घ्यावें.

उत्तर, ४ रुपयांचे भावाचे २० खंडी, ६ रु. चे १० खं; १० रु. चे १० खं; १२ रु. चे २० खं.

हे पडलें पाणीं ६४ शेर, तर त्या मुकुटांतील शुद्ध सोनें आणि तांबें यांचें प्रत्येक परिमाण काय होईल
आतां केवळ तांबें किंवा रुपें याचा भाव १२ शुद्ध सोन्याचा ५२ आणि मिश्राचा ६४ आहे.
याज करितां ६४ { ५२ / १२ } १२ / २८ आणि याची बेरीज म्हणजे १२ + २८ = ४० परंतु ही १० पाहिजे या
ज करितां रीती प्रमाणें ४० : १० : : १२ : ३. शेर तांबें.
४० : १० : : २८ . ७ : शेर शुद्ध सोनें } हें उत्तर.

● अनेक पदार्थ असून अमुक परिमाणाचे असावे असें सांगितलें असेल तरी ह्या याच रीतीनें एकाचें परिमाण काढून मग दुसऱ्याचें काढावें. अशा प्रकुरमं सर्वांचीं परिमाणें निघतील. यांत दुसरी आणि तिसरी यांलांना आधार सांगायाचें अगत्य नाहीं कारण, या दोनही प्रथम रीतीपासून निघतात त्यामुळे त्याचें पूर्वीच वर्णन केलें गेलें आहे.

तिसरें, १५, १७, १८, २२ क्यारेकूर चांगलें सोनें आहून मिश्रक रायास इच्छितो, परंतु, त्यांत तिसरे १८ क्यारेकरचें ५ तोळे घालणें आणि मिश्र २० क्यारेकर चांगलें व्हावें. तर बाकीचें किती किती तोळे घ्यावें.

उत्तर, १५चें ५ तोळे. १७चें ५ तोळे, २२चें २५ तोळे.

इष्टराशि.

इष्टराशि म्हणजे किती एक प्रश्नांचीं उत्तरें उघड करायाची एक रीति आहे कीं, ज्या प्रश्नांचीं उत्तरें साधारण पूर्व रीतींकरून उघड होत नाहींत, कोणेवेळेस या रीतीस मिथ्याप नोद्भूत ह्मणतात, कारण, सत्य संख्ये प्रमाणें मनःकल्पित मिथ्या संख्यानीं काम केल्या पासून शेवटीं सत्य संख्या उत्पन्न होते, कोणी या रीतीस चुकशोध ह्मणतात, कारण, मिथ्या संख्यांचे तपशीलानें शोध करितात, आणि चुक मिळविल्या पासून सत्य संख्या उत्पन्न होते.

ती एकेरी आणि दुहेरी या भेदेंकरून दोन प्रकारची आहे.

एकेरी इष्टराशि.

एकेरी इष्टराशि तीच होय कीं जी पासून एकच मिथ्या संख्येचे साह्यानें प्रश्नाचें उत्तर उघडतें. प्रश्नें जें उत्तर त्याचें मिथ्या संख्येशीं प्रमाणांत आहे, ते प्रश्न एकेरी इष्ट राशींतील होत, म्हणजे असें, इच्छिले संख्येस दुसरें सांगितले संख्येनें गुणायाचें किंवा भागायाचें आहे, अथवा, जेव्हां इच्छिली संख्या तिणे तीच अथवा तिचे हर कोणते भागानें किती एक सांगितल्या वेळा अधीक किंवा उणी करायाची आहे.

रीति.

इच्छिली संख्या काढायाकरितां कोणती ही संख्या घ्यावी, आणि प्रश्नांत सांगितल्या प्रमाणें तिशीं काम करावें, नंतर या प्रमाणें प्रमाण राशी कराव्या. जसें मिथ्या संख्येचें उत्पन्न : त्या मिथ्या संख्येस आहे : : तसें प्रश्नांतील उत्पन्न : त्याचे इच्छिले सत्य संख्येस होईल.*

प्रथम, एक मनुष्यानें आपले द्रव्याचा $\frac{१}{३}$ आणि $\frac{१}{४}$ खर्च केल्यानंतर पाहातो तों ६०० रुपये बाकी राहिले, तेव्हां त्याजवळ पहिलें द्रव्य किती होतें.

पहिलें द्रव्य १२०० रुपये अशी मिथ्या संख्या घे.

---

* या रीतीचें कारण उघड आहे कीं, उत्पन्नें आपआपले संख्यांशीं प्रमाणांत आहेत.

जसें न अ : अ : : न ज : ज. अथवा $\frac{अ}{न}$: अ : : $\frac{ज}{न}$: ज

किंवा $\frac{अ}{न} + \frac{अ}{म}$ इत्यादि : अ : : $\frac{ज}{न} + \frac{ज}{म}$: ज. आणि इत्यादि.

आतां १२०० चा $\frac{1}{3}$ = ४००
आणि १२०० चा $\frac{1}{4}$ = ३००
———
७००
१२००
———
५०० बाकी.

जसें, ५००:१२००::६००:१४४० ही इच्छिली राशि हें उत्तर.

याचा ताळा.
१४४० चा $\frac{1}{3}$ = ४८०
१४४० चा $\frac{1}{4}$ = ३६०
———
= ८४०

१४४०
———
६०० ही बाकी प्रश्नाप्रमाणें आहे.

दुसरें, ती संख्या काय आहे, जी ७ यानीं गुणून तो गुणाकार ६ यानीं भागिला असतां भागाकार २१ येईल. उत्तर १८

तिसरें, ती संख्या काय आहे कीं जीतिचे अर्धानें, तृतीयांशानें आणि चतुर्थांशानें युक्त केली असतां ७५ बेरीज होईल.

उत्तर, ३६

चवथें, एक सर्दारानें आपले फौजेचा $\frac{1}{2}$ आणि $\frac{1}{3}$ कं. हीस पाठविला असतां तत्रावर १००० मनुष्यें राहिलीं तेव्हां त्या फौजेंत सर्व मनुष्यें किती होतीं.

उत्तर ६००० मनुष्यें.

पांचवें, कोणीएक गृहस्थानें भिकाऱ्यास ५२ पैसे वांटले त्यांत भती केल्या, पुरुषास ६ बायकोस ४ आणि पोरास २ याप्रमाणें आणि त्यांत बायका पुरुषांचे दुप्पट, आणि पोरें बायकांचे तिप्पट अशीं होतीं तेव्हां पुरुष, बायका आणि पोरें अशीं त्या जमावांत किती किती होतीं.

उत्तर, पुरुष २ बायका ४ आणि पोरें १२

साहावें, दोघे भलेमनुष्य मार्गांत गोष्टी करित चालिले होते, त्यांत एकानें दुसऱ्यास विचारिलें कीं, तुह्मास वय किती आहे, तेव्हां त्यानें उत्तर केलें कीं माझे वयाचे वर्षांचे $\frac{1}{2}$ सातानीं गुणिले आणि त्या गुणाकारांत त्याच वर्षांचे $\frac{1}{3}$ मिळविले तर २१९ होतात, तेव्हां त्याचे वयाचीं किती वर्षें आहेत.

उत्तर. ४५ वर्षें,

दुहेरी इष्टराशि.

दुहेरी इष्टराशी म्हणजे किती एक प्रश्नांचीं उत्तरें दोन मिथ्यासंख्यांचे साहाय्यानें उघड करायाची रीति.

दुसरे प्रश्न इष्टराशींत असे प्रश्न येतात कीं. ज्यांचीं उत्तरें सत्यसंख्या इष्टराशी-च्या प्रमाणांत नाहींत, जसें या प्रश्नांत, ज्यांत इच्छिलीसंख्या त्या संख्येचा भाग किंवा समगुणाकार यांतून एक प्रकारानें वाढविली किंवा सांगितलेले संख्येनें उणीकेली, जीसांगितलीसंख्या इच्छिलसंख्येचा कोणता भाग आहे हें ठाऊक नाहीं.

प्रथमरीति.*

सुमारानें कामाचे उपयोगी दोन मिथ्या संख्या घ्याव्या, आणि त्यांशीं प्रश्नांचे संकेताप्रमाणें वेगळाली एकेरीरीतीप्रमाणें कामें करावीं. नंतर पाहावें कीं, या दोन संख्यापासून जीं दोन उत्पन्नें होतील त्यांत आणि प्रश्नास किती भेद आहे, याचे दास अंतर ह्मणतात. तें अंतर अधिक किंवा उणें असेल त्याप्रमाणें त्यास (+) करून (-) चिन्हें करावीं.

नंतर तीं दोन अंतरें गुणावीं अशीं कीं दुसरे अंतरानें प्रथमसंख्या गुणिली जाईल, आणि प्रथम अंतरानें दुसरी संख्या, तेव्हां.

जर अंतरांचीं चिन्हें सरूप आहेत, तर वरचे गुणाकारांची वजाबाकी त्या अंतरांचे वजाबाकीनें भागावी, भागाकार येईल तो उत्तर होईल.

परंतु अंतरांचीं चिन्हें विरूप आहेत, तर उत्तराकरितां वरचे गुणाकारां-

---

* सिद्धांत यारीतीस आश्रय हा आहे कीं, प्रथम अंतर दुसरें अंतरास आहे, जशी प्रथममिथ्यासंख्या आणि प्रथम सत्यसंख्या यांची वजाबाकी, दुसरी मिथ्यासंख्या आणि दुसरी सत्यसंख्या यांचे वजाबाकीस आहे. जेव्हां अशाप्रमाणांत नाहीं, तेव्हां यारीतीनें उत्तर बरोबर काढितां येत नाहीं. ही रीति खरी आहे असें पूर्व आश्रयावरून दाखविता.

अ, आणि ब, हीं दोन अक्षरचिन्हें घेतले संख्यांचीं असतील. तसें आ आणि बा हीं त्यांचीं प्रश्नाचे संकेताप्रमाणें उत्पन्नें असतील. तसें र आणि स हीं त्यांचीं अक्षरें असतील, म्हणजे न हें संकेताचें सत्यउत्पन्न याशीं वेगळाल्या आ आणि बा यांच्या वजाबाक्या र आणि स असतील, आणि इष्टसंख्यादाखवायास क्ष घेतला ह्मणजे क्षनें उत्पन्न होईल.

तेव्हां न-आ=र आणि न-बा=स अथवा बा-आ=र-स आतां ज्यांस यारीतींचा आश्रय आहे, त्या प्रमाणाप्रमाणें र : स : : क्ष-अ : क्ष-ब अंत्यपदें आणि मध्यपदें गुणून म्हणजे रक्ष-रब=सक्ष-सअ अनंतर स्थळांतरानें रक्ष-सक्ष=रब-सअ. भागाकारानें $क्ष=\frac{\text{रब}-\text{सअ}}{\text{र}-\text{स}}$ ही इच्छिली संख्या आहे, म्हणजे हीरीति तेव्हां आहे कीं, जेव्हां दोन्हीं अंतरें कमी पडतात.

जर दोन्हीं उत्पन्नें सत्यउत्पन्नाहून अधिक असतील, म्हणजे आ आणि बा, ही दोन्हीं न, हून अधिक असतील, तर न-आ=-र आणि न-बा=-स, ह्मणजे र आणि स, हीं दोन हीं (-) ऋण आहेत. याजकरितां -र : -स : : क्ष-अ : क्ष-ब, परंतु -र : -स : : +र : +स. याजकरितां र : स : : क्ष-अ : क्ष-ब, आणि सर्व बाकी पूर्व प्रकाराप्रमाणें बरोबर निघेल.

परंतु जर एक उत्पन्न आ कमी आणि दुसरें उत्पन्न बा अधिक असेल. अथवा एक अंतर र (+) धन आणि दुसरें अंतर स (-) असेल तर पूर्वप्रमाणें प्रमाणराशी करून समीकरणाचें रूप होईल. $क्ष=\frac{\text{रब}+\text{सअ}}{\text{र}+\text{स}}$ आणि ही रीति अंतरें विरूप आहेत तेव्हां उपयोगी होय.

ची बेरीज त्याच अंतराचे बेरिजेनें भागावी.

टीप, दोन अंतरांची चिन्हें धन किंवा ऋण आहेत तर तीं सरूप होत, एक धन आणि एक ऋण अशीं आहेत तर तीं विरूप होत.

उदाहरणें.

प्रथम, ती संख्या काय आहे कीं, जी ६ यानीं गुणून त्या गुणाकारांत १८ मिळविले आणि ती बेरीज ९ यानीं भागिली, तर भागाकार २० होईल.

आतां १८ आणि ३० या दोन मिथ्या संख्या सत्यसारिख्या मानून घे.

प्रथमसंख्या.		दुसरीसंख्या.	ताळा.
१८		३०	२७
६		६	६
१०८		१८०	१६२
१८		१८	१८
१२६		९) १९८	९) १८०
१४	उत्पन्नें.	२२	२०
२०	सांगितलें उत्पन्न	२०	
− ६	अंतरें	+ २	
३०		१८	
१८०		३६	
३६			
९) २१६	गुणाकाराची बेरीज.		
२७	इच्छिली संख्या, हें उत्तर.		

दुसरी रीति.

गणिताचा तपशील करून इच्छिलें संख्येचे अति सन्निध दोन संख्या काढून त्याशीं प्रश्नाचे संकेताप्रमाणें वेगळाली कामें करावीं. नंतर जीं उत्पन्नें होतील, तीं अधिक उणी पाहून त्यांस (+) धन (−) ऋण चिन्हें अनुक्रमें करावीं.

या अति संनिध संख्यांची वजाबाकी त्यांतील एक अंतरानें गुणावी आणि ता गुणाकार त्या अंतरांचे वजाबाकीनें भागावा, जर तीं अंतरें सरूप आहेत. आणि विरूप आहेत, तर त्याचे बेरिजेनें भागावा अथवा या प्रमाणें प्रमाण राशी करावी.

जशी दोन अंतरांची वजाबाकी : किंवा दोन उत्पन्नाची वजाबाकी : : दोन धनुल अति संनिध संख्यांचे वजाबाकीस आहे : : तसें कोणतें ही अंतर : तें आपले संख्येस शुद्ध करावयाचें.

नंतर तो भागाकार किंवा तें इच्छाफळ आपली संख्या अधिक असल्यास तींतून वजा करावें आणि आपली संख्या उणी असल्यास त्यांत मिळवावें. म्हणजे इच्छिली संख्या उत्पन्न होईल.

उदाहरणें.

प्रथम. पूर्व उदाहरण आहे तेंच या रीतीनें करावें.

प्रथमसंख्या.
$\frac{३}{८}$

-६--अंतरें--+२
३० या अधिकसंख्येंतून.
३ वजाकरून
२७ बाकी इच्छिलीसंख्या. हेंउत्तर.

दुसरीसंख्या.
३० याचीवजाबाकी १२
लाहान अंतर २
याची बेरीज ८)२४
३ भागाकार.

अथवा, २२-१४:३०-१८:: किंवा ८:१२::२:३. पूर्वप्रमाणें ३० यासंख्येनें शक्ष होईल.*

दुसरें, बापआणिलेंक हे दोघे बोलत होते, तेथें लेंकानें बापास विचारिलें, बाबा तुह्मास वय काय आहे, बाप सांगतो, अरे बाळा आज तुझें वय माझे वयाचा $\frac{१}{३}$ आहे परंतु ५ वर्षांपूर्वी तुझें वय माझे वयाचा $\frac{१}{४}$ होतें तेव्हां त्या दोघांचीं वयें काय आ.
उत्तर, १५ आणि ४५.

तिसरें, कोणीगृहस्थानें प्रतिदिवशीं १$\frac{१}{२}$ प्रमाणें २० दिवसांचे करारानें एक कारागीर ठेविला, त्याची करारी येणेंप्रमाणें, तो कारागीर ज्या दिवशीं खेळेल किंवा गैरहजीर होईल त्या दिवसाचा त्यापासून उलटा रुपया $\frac{१}{२}$ दंड घ्यावा, पुढें करारीचे दिवस पुरे झाल्यानंतर त्या गृहस्थाकडे त्या कारागिराचे रुपये २२ वरविले. तेव्हां त्यानें किती दिवस काम केलें.
उत्तर, १६ दिवस.

चवथें, अ, आणि ब. हे दोघे बरोबर समान रुपये घेऊन जुगार खेळायास बसले तों प्रथमच अ. रुपये २० जिंकिला, नंतर जवळचे सर्वपैक्याचे $\frac{१}{२}$ हारला, शेवटीं खेळ संपून उठले, ते समयीं बचे जवळ अचे चौपट पैका झाला, तेव्हां प्रत्येकाजवळ आरंभीं किती रुपये होते
(उत्तर, १०० रुपये.

पांचवें, अ, आणि ब या दोघांचा आदाय बरोबर आहे, त्यांत अ आपले आदायाचा $\frac{१}{५}$ संग्रह करितो, परंतु ब प्रतिवर्षी अ पेक्षां ५०० रुपये अधिक खर्च करितो, आणि ४ वर्षांनंतर बला १००० रुपये कर्ज झालें, तेव्हां प्रतिवर्षी एकेकाचा आदाय व खर्च किती तो सांग.
उत्तर. १२५० प्रत्येकाचा आदाय. आणि अचा खर्च प्रतिवर्षी १००० रु. बचा १५०० रुपये.

गणितांतील कामाचे प्रश्न.

प्रथम, तोफेचे गोळ्याचा पोंचावेग काळमानाचे १ सेकंदांत २०० फुट आहे तर त्या मानानें पृथ्वीपासून सुटलेला गोळा सूर्यमंडळीं पोंचण्यास किती वेळ लागेल, सू

---

* ह्मणजे पूर्वे आश्रय मांगितला त्या प्रमाणें र : स :: क्ष-अ : क्ष-ब. या जकरितां भागाकारानें र स :: ब-अ : क्ष-ब. परंतु बा-आ = र स या जकरितां बा-आ : स ; ब-अ : क्ष-ब अथवा बा-आ : ब-अ :: स : क्ष-ब. म्हणजे ही दुसरी रीति आहे.

र्य आणि पृथ्वी यांचेमध्यें अंतर १००००००००मैल असें कल्पिलें आणि एक वर्ष म्हणजे ३६५ दिवस ६ अवर. उत्तर. ८ $\frac{४८०८}{१३१४०}$ वर्षे.

दुसरा, तोफेचा गोळा बाहेर पडतो ते समयीं त्याचा वेग १ सेकंदांत १५०० फुट जाण्याचा असतो आणि सूर्याचा प्रकाश सूर्यापासून पृथ्वीवर पोंचण्यास ७ $\frac{१}{२}$ मिनुटें लागतात, तेव्हां प्रकाशाचे वेगाचें त्या तोफेचे गोळ्याचे वेगाशीं गुणोत्तर काय आहे. उत्तर, जसें ७८२२२२ $\frac{२}{३}$: १ एकाला.

तिसरा, एक मिनुटांत ७० पावलें चालतो. पाउल ह्मणजे २८ इंच, तर या भावानें एक अवरांत किती चालेल. उत्तर. १ $\frac{११३}{१३२}$ मैल.

चवथा, एक सेकंदांत २ पावलें अथवा एक मिनुटांत १२० पावलें चालतो. पाउल ह्मणजे २८ इंच. तर या भावानें कोणी शिपाई कुच करून चालते समई १ अवरांत किती चालेल. आणि एक ठाणें २० मैल दूर आहे, तेथें त्याच शिपायास पोंचण्यास या भावानें किती वेळ लागेल. मार्गी विश्रांतीस एक अवर अवकाश दिला आहे. उत्तर. ३ $\frac{३}{११}$ मैल १ अवरांत चालेल. आणि अ. ५ मि. १६ $\frac{२}{३}$ वेळ लागेल.

पांचवा. ७०० यार्ड लांबीची एक भिंत २० दिवसांत सिद्ध करायाचा संकेत, त्यांत १२ माणसांनीं ११ दिवस काम केलें. तों ती भिंत २२० यार्ड मात्र सिद्ध झाली. तेव्हां या भावानें काम चालविणें तर पूर्वसंकेताप्रमाणें भिंत पुरी होण्यास पूर्वसंख्येहून किती माणसें अधिक असावीं.

उत्तर, ४ माणसें पूर्वसंख्येहून अधिक.

साहावा. ५०००००००० रुपये एकाशीं एक लागून एका पुढें एक असे भूमीवर एक सरळ रेषेंत ठेविले, मनांत आणावें. एकेक रुपयाचा व्यास एकेक इंच आहे. तर ती रुपयांची ओळ किती लांब होईल.

उत्तर, मै. ७८९१ या. ७२८ फु. २ इं. ८.

सातवा. एक शेताचे भोंवता बांध आहे, त्याची परिमिती ५३८ यार्ड आहे, आणि त्या शेताचे समोरासमोरचे बाजूंवर अ, आणि ब, हे दोघे मनुष्य उभे आहेत त्यांत अ एक मिनुटांत ११ यार्ड चालतो, आणि ब तीन मिनुटांत ३४ यार्ड चालतो, ते दोघे शेतास सव्य प्रदक्षिणा करायास उभे होते तेथून एक काळींच निघाले. तर लवकर चालणाराच्या किती प्रदक्षिणा होतील. तेव्हां पुढील मट चालणारास मिळवील. उत्तर. १७ प्रदक्षिणा.

आठवा. कोणी एकला मनुष्य अ १२ दिवसांत जें काम करितो आणि

तेंच काम दुसरा मनुष्य व एकला १४ दिवसांत करितो जर तेंच काम ते दोघे मि ळून करितील तर किती दिवस लागतील. उत्तर, ९ $\frac{५}{१३}$ दिवस.

नववा. एक तांब्याचे खाणींत एकाचा भाग $\frac{३}{८}$ आहेत, त्यानें त्यां तून $\frac{३}{५}$ एक मनुष्यास १०००० रुपयांस विकले. तेव्हां त्या सगळे खाणीचें मोल काय होईल. उत्तर. ४०००० रुपये.

दाहावा. कोणी एक मनुष्य आपले प्राप्तीचे एक चतुर्थ अंशाहून २० रुपये अधिक खर्च करितो. तथापि त्याचे जवळ प्राप्तीचे अर्धाहून ३०० रुप. अधिक संग्रह राहतो. तेव्हां त्याची सर्व प्राप्ती किती. (उत्तर २००० रुप.

अकरावा. घड्याळांतील मिन्यूट कांटा आणि अवर कांटा हे दोन्ही १२ अवरांचे स्थानी एकत्र होते, ते पुनः पुढें केव्हां एकत्र होतील.

उत्तर. १ $\frac{१}{११}$ अवर किंवा अ. मि. से. १. ५. २७ $\frac{३}{११}$

बारावा. कोणी एक मनुष्याची प्राप्ती एक वर्षाची १५००० रुपये आहे त. आणि एक आठवड्यांत ३१० रुपये खर्च करितो. तेव्हां वर्षांनीं किती रु पये संग्रह किंवा कर्ज होईल. एथें वर्ष विलायती मानावें.

उत्तर. ४०८० रुपये संग्रह.

तेरावा. कोणी एक मनुष्यानें दर पैशास २ प्रमाणें १०० आंबे विक त घेतले पुनः दर पैशास ३ प्रमाणें दुसरे १०० आंबे विकत घेतले. नंतर दो न पैशांनें ५ प्रमाणें ते सर्व आंबे विकले. तेव्हां मुदलांत नफा किंवा तोटा कि ती झाला तो सांग. (उत्तर. ६ पैसे तोटा झाला.

चवदावा. दर आसामीस दर दिवशीं दोन शेर प्रमाणें १५०० मनु ष्यांस १२ आठवडे पर्यंत पुरेल इतकें अन्न कोठींत आहे. तेंच अन्न दर आ सामीस दर दिवशीं १ $\frac{१}{२}$ शेर प्रमाणें केल्यास २० आठवडे पर्यंत किती मनुष्यां स पुरेल. (उत्तर. १२०० मनुष्यास.

पंधरावा. लंडन शहराचे अक्षांशवृत्तांत पृथ्वीचे भोंवती त्या स्थळीं अक्षांशवृत्त परिघाची लांबी १५५५० मेल आहे. आणि पृथ्वी आपले अंसा वर २३ अवर ५६ मिन्युटांत पश्चिमेकडून पूर्वेकडे प्रदक्षिण एक वार फि रते, तेव्हां या भावानें एक अवरांत फिरण्याचें गमन किती आहे तें सांग.

उत्तर. ६५० $\frac{३५०}{३५९}$ मेल.

सोळावा, कोणी मनुष्य अंतकाळीं आपलें सर्व द्रव्य पुत्रास देऊन - आपण मरण पावला नंतर त्या पुत्रानें त्या द्रव्याचा $\frac{१}{३}$ भाग सहा महिन्यांत खर्च-

केला. नंतर बाकी राहिले द्रव्याचे $\frac{३}{५}$ बारामहिन्यांत उपजीविकेस खर्च करून हिसाब पाहातो तों ८२०० रु. बाकी राहिले. तेव्हां सर्व द्रव्य किती होतें तें सांग.

रु. पा. रे.
उत्तर. १९१३३ .. १ .. ३२ सगळें द्र.

सत्रावा. एका किल्यास शत्रूनें फौजेचा वेढा दिला होता त्या किल्यांत १००० मनुष्य होते, त्यांस भक्षायास प्रतिदिवशीं प्रति मनुष्यास २ शेर प्रमाणें ५ आठवडे पर्यंत पुरेल इतकें अन्नसंग्रहीं होतें. तेच समयीं त्यांचे कुमकेस ५०० मनुष्य किल्यांत आले. परंतु वेढा उठवाया जोगती कुमक येण्यास ८ आठवड्यांचा अवकाश आहे, तेव्हां तेंच अन्न त्या सर्वांस ते यपर्यंत पुरविणें प्राप्त. तेव्हां दर मनुष्यास दरदिवशीं किती शेर प्रमाणें द्यावें तें सांग.

उत्तर. ३ $\frac{१}{२}$ पावशेर.

अठरावा. कोणी एक मनुष्यानें आपले अंतकाळीं धाकटे पुत्रास ८४००० रुपये दिले, हे वडील पुत्रास जें द्रव्य दिलें त्याचे $\frac{४}{५}$ होतात, तेव्हां त्या मनुष्याचें सर्व द्रव्य किती तें सांग. उत्तर. १८९००० सर्व द्रव्य.

एकुणीसावा. कोणी एक मनुष्य घड्याळाचे काट्यावर दृष्टी ठेऊन बसला होता, त्यास दुसऱ्यानें विचारिलें. किती अवर झाले. तेव्हां तो म्हणतो. पांचापासून साहा इतक्यांत आहे. ते समयीं पुनः त्यानें विचारिलें कीं. निश्चय सांग. त्यास त्यानें उत्तर केलें. जे या समयीं अवर कांटा आणि मिन्युट कांटा हे दोनी एकत्र आहेत, यावरून समज.

एक अवरांत अवर कांटा पूर्ण परिघाचा $\frac{१}{१२}$ चालतो आणि मिन्युट-कांटा एक अवरांत सगळा परिघ अथवा $\frac{१२}{१२}$ चालतो. (उत्तर ५ .. [illegible] मिन्युट.

विसावा. २० मनुष्यें १२ दिवसांत जें काम करितील त्याचें [illegible] काम पूर्ववेळेंच $\frac{१}{२}$ त करणें तर [illegible] मनुष्यें असावीं. (उत्तर ३०० मनुष्य.

एकविसावा. कोणी एक मनुष्यानें मरण समयीं आपले द्रव्याचा $\frac{१}{८}$ एक पुत्रास देऊन जें बाकी राहिलें त्याचें $\frac{१}{२}$ दुसरे पुत्रास दिलें आणि जें बाकी राहिलें तें बायकोस दिलें. पुढें पाहतां त्या दोन पुत्रांचे वांट्याची वजावाकी ५१४२ रुपये १ पावला ३३ रेस इतकी आहे. तेव्हां बायकोस किती पावलें तें सांग.

रु. पा. रे.
उत्तर.

बाविसावा. कोणी मनुष्यानें मरण समयीं आपले द्रव्याचे $\frac{१}{२}$ एक पुत्रास आणि बाकी राहिलें तें दुसरे पुत्रास देणें असें लिहून मरण पावला. पुढें ते दोघे पुत्र द्रव्य वांटून घेऊं लागले. तों एकास दुसऱ्यापेक्षां १२०० रु. अधिक आले ते

त्यां सगळें द्रव्य कितीतें सांग. (उत्तर, ४०००० रुपये.

तेविसावें, मुंबई आणि पुणें यांचेमध्य अंतर समारानें १०० मैल आहे. आतां अ. आणि ब, हे दोन सांडणी स्वार या दोन स्थळांहून एकदांच निघाले. ते असे कीं अ, मुंबईहून निघाला तो पुण्यास जाणारा, आणि ब, पुण्याहून निघाला तो मुंबईस जाणारा. पुढें ते निघाल्या पासून ७ अवरानीं मार्गी परस्पर भेटले, तेव्हां असें कळलें कीं ब पेक्षां अ दर अवरास १/२ मैल अधिक चालिला. तेव्हां यावरून ते उभयतां सांडणी स्वार दर अवरास किती किती मैल चालिले.

उत्तर. ७ ११/२८ मैल, अ, आणि ६ २५/२८ मैल. ब.

चोविसावा, पुणें आणि पंढरपुर यांचेमध्यें अंतर समारानें १३० मैल आहे आतां प्रातः काळीं आठ अवर वाजतांच पंढरपुराहून अ, जासूद निघाला पुण्यास जाणारा, तो दर अवरास ३ मैल चालतो आणि त्याच दिवशीं सायंकाळीं ४ अवर वाजतांच पुण्याहून ब जासूद निघाला पंढरपुरीं जाणारा. तो दर अवरास ४ मैल चालतो. तेव्हां या दोघांची मार्गी पंढरपुरापासून किती मैलांवर भेट होइल. (उत्तर, पंढरपुरापासून ६९ ३/७ मैलांवर.

पंचविसावा, १०० आंबे एकेक यार्डाचे अंतरानें सरळ रेषेंत ठेविले आहेत, आणि प्रथम आंब्या पासून एक यार्डाचे अंतरानें पाटी ठेविली आहे, ते समयीं एकानें दुसऱ्यास सांगितलें कीं प्रति खेपेस १ एक आंबा पाटींत ठेवावा तर अशारीतीनें सर्व आंबे त्या पाटींत येत पर्यंत त्या मनुष्यास किती चालावें लागेल तें सांग. (उत्तर. मैं. ५ . . यार्ड. १३००

सविसावा, विलायतेकडेस इतालीया देशांत घड्याळें आहेत. तेथें, अहोरात्र मिळून एकापासून २४ पर्यंत वाजतात तेव्हां अवर कांट्याची १ प्रदक्षिणा होते त्या प्रदक्षिणेंत किती टोले पडतात तें सांग. (उत्तर. ३०० टोले.

सत्ताविसावा, शेषयानावाचा १ मनुष्य होता. त्यानें आपले बुद्धीबळानें अपूर्व बुद्धबळाचा खेळ उत्पन्न करून आपले राजास दाखविला, ते समयीं तो खेळ पाहून राजा अतिसंतुष्ट झाला. आणि त्याला माग म्हणाला, तेव्हां त्यानें मागितलें कीं या बुद्धबळाचे पटास ६४ कोष्टक आहेत, तर पहिले कोष्टकास १ गहूं दुसऱ्या कोष्टकास २ तिसऱ्यास ४ या प्रमाणें प्रति कोष्टकास दुपटीनें वाढत असे ६४ पर्यंत जे गहूं होतील, त्यांचें द्रव्य मला द्यावें. तें राजानें मान्य केलें. तेव्हां जर २००७५ गहूं एक शेरांत राहतील. तर दर मणास दोन रु. प्रमाणें त्या सर्व गव्हांचे किती रुपये होतील. (उत्तर, रु. १८२८७१४००४५०५७ . . . पा. २ . . . रे. १८

अव्यक्तिसाचा. कोणी एक मनुष्याचें धनांकांपैकी [illegible] येथें तें [illegible] रुपये प्रथम [illegible] आणखी [illegible] ठेवले, बाकी उरले [illegible] रु. [illegible] इतके झाले तेव्हां त्यापाशीं किती रुपये होते ते सांग.

उत्तर, ४०००० रुपये.

कर्जफेडीचा साचा, कोणी एक मनुष्यानें [illegible] रुपये कर्ज घेतलें. नंतर कांहीं [illegible] रुपये दिले. इतक्यानें व्याज सुद्धां तें कर्ज फिटलें तेव्हां दर साल दरशेकडा व्याजाचा दर काय तो सांग.

उत्तर, ५ रुपये.

[illegible] साचा, १०००० रुपये आहेत. अ, ब, क, या तिघांस वांटून द्यावे ते असे कीं अ ला क, हून १२०० रुपये अधीक मिळतील, आणि ब ला क, हून ५०० रु. अधिक मिळतील, ते त्या तिघांत कोणास किती रु. येतील ते सांग.

उत्तर. अ ४४५० ब ३७५० क ३२५० रुपये.

[illegible] साचा, कोणी एक मनुष्याजवळ घड्याळ होतें, त्यास इसमानें विचारिलें कीं, या घड्याळांत किती वाजले आहेत. तेव्हां तो सांगतो जे दुपारचे १२ अथवा मध्यान्हापासून हा वेळ पर्यंत जो काळ गेला, तो या वेळेपासून रात्रीचे बारा वाजेपर्यंत जो काळ आहे त्याचें [illegible] आहे तेव्हां घड्याळांत किती वाजले सांग

उत्तर [illegible] मिनुटें.

[illegible] साचा, [illegible] कोणा एकाजवळ मलमलीचें [illegible] होतें [illegible] किंमत १२००० [illegible] त्यानें त्यांतून [illegible] विकलें, आतां बाकी राहिलें भागाचे [illegible] रुपये होतील.

उत्तर. [illegible] त्याची किंमत १८५० रुपये

[illegible] साचा, १२०० बिघे जमीन अ, ब, क, या तिघांस वांटून द्यावयाची आहे. [illegible] की, ब ला अ हून १०० बिघे अधिक [illegible] क ला ब हून ५० बिघे अधिक मिळेल तर त्यांतून कोणास किती येईल ते सांग.

[illegible] अ ला. ३१२ [illegible] ब ला ४१२ [illegible] क ला [illegible] बिघे

[illegible] साचा. ती संख्या काय आहे कीं, ज्या संख्येंतून [illegible] बाकीत [illegible] मिळविलें तर बेरीज १० होईल

उत्तर [illegible]

[illegible] साचा. एक संख्या अशी आहे कीं त्या संख्येस [illegible] गुणिलें असतां गुणाकार [illegible] होतो [illegible] त्या संख्येचा [illegible] काय ते सांग

[illegible] साचा, [illegible] रुंदीचा [illegible] आणि [illegible] पाहिल्यावर बरोबर [illegible]

उत्तर,

[illegible] साचा [illegible] व्याज [illegible] १२५०० [illegible]

अडतिसावा. कोण्या गृहस्थानें मरणसमयीं आपलें द्रव्य, अ, ब, क, या तीन पुत्रांस वांटून दिलें. तें असें कीं जेव्हां ब,ला ३ तेव्हां अ,ला ४ आणि जेव्हां ब,ला ६ तेव्हां क,ला ५ या प्रमाणें. आतां अचा भाग ४०००० रुपये निघाला, तेव्हां सगळें द्रव्य कितीतें सांग.

उत्तर. ९५००० रुपये.

एकुणचाळिसावा. एक कुत्रा आणि एक ससा असे एके रानांत ४० याडांचे अंतरानें होते, तों ससा कुत्र्यास पाहून भयानें पळूं लागला, त्यास आरंभीं कुत्र्यानें पाहिलें नव्हतें. परंतु ४० सेकंद गेल्यानंतर पाहिलें, आणि त्यास धरावें या बुद्धीनें त्याचे मागें धांवूं लागला, या प्रमाणें दोघे धांवूं लागले. त्यांत सशाचे धांवण्याचा वेग १ अवरांत १० मैल आणि कुत्र्याचे धांवण्याचा वेग १ अवरांत १८ मैल आहे. पुढें कुत्र्यानें त्या सशास धरिलें तेव्हां कुत्रा चालूं लागल्या पासून सशास धरी पर्यंत मध्यें काळ किती गेला, व कुत्रा किती चालिला तें सांग.

उत्तर. ६० $\frac{५}{२२}$ सेकंद आणि ५३० याडें.

चाळिसावा. दोन भले मनुष्यांचे पुत्र द्रव्यहीन होते त्या दोघांस एका सरकारांत एक समयींच दोन स्थळीं समान पगाराचा उद्योग मिळाले तेव्हां त्यांचीं वयें १८ वर्षांचीं होतीं, त्यांत एक अविवेकी तो आपले पगारा पेक्षां प्रतिवर्षी १०० रुपये अधीक खर्च करी, परंतु त्याचे मनांत लोकांचा पैका बुडवावा ही गोष्ट वाईट समजून प्रतिवर्षी त्या अधिक खर्च केले रुपयाचें दरशेंकडा दरवर्षास व्याज रुपये ५ प्रमाणें स्वतां लिहून आपले जिवाचा विमा दरशेंकडा रुपये ६ प्रमाणें करीत असे.

आणि दुसरा विवेकी होता तो प्रतिवर्षी आपले पगारांतून १०० रुपये संग्रह करून ते दरशेंकडा दरसाल व्याज रुपये ५ प्रमाणें वाढवीत असे.

नंतर त्या दोघांचीं ५० पन्नास वर्षांचीं वयें झालीं तेव्हां परस्पर भेटले, ते समयीं सरकारांतून प्रत्येकाचा पगार प्रतिवर्षी ८०० रुपये होता. ते परस्पर गोष्टी करूं लागले. तेथें अविवेक्यानें पगारापेक्षां अधीक खर्च केला ही आपली चूक पदरीं घेऊन निश्चय केला कीं, आज पासून जुनें कर्जाचें व्याज व जीवाचे विम्याचा ऐवज देऊन जें पगारांतून बाकी राहील तितक्यांत आपला खर्च चालवीन. आणि विवेक्यानें निश्चय केला कीं, आज पर्यंत संग्रह झाला आहे. तितकें मुद्दल राखून त्याचें व्याज व सरकार संबंधी पगार हें सर्व खर्च करीन.

आतां पुढें अविवेक्यास प्रतिवर्षी खर्चास किती रुपये राहतात. आणि विवेकी याजवळ किती रुपये संग्रह आहे, व प्रति वर्षी त्याचा खर्च किती होतो, तो सांग.

			आ.	पै.	
	अविवेक्यास प्रतिवर्षी खर्चाकरितां	[illegible]	२.	१६	राहातात
उत्तर.	विवेक्यास प्रति वर्षी खर्चाकरितां	११७६.	१.	८३	होतात.
	आणि याजपाशीं संग्रह	७५२९.	[illegible]	५०	आहे.